PRATICA RAGIONATA
DELLE OPERAZIONI
ARITMETICHE
ESTESA
ALLE FRAZIONI E LORO RIDUZIONE;
ALLA NOTIZIA ED OPERAZIONI
SULLE RADICI SI' QUADRATE CHE CUBE
ALLE PROPORZIONI E PROGRESSIONI
ARITMETICHE
DILUCIDATE CON BUONA SCELTA DI PROBLEMI
E DI TEOREMI
ALLA REGOLA AUREA
E SUE PIU' UTILI
APPLICAZIONI
DA
GIO. BARTOLOMEO COLTI

IN PISTOJA MDCCLXXXX.
NELLA STAMPERIA D' ATTO BRACALI.

CON APPROVAZIONE.

PRATICA RAGIONATA
DELLE OPERAZIONI
ARITMETICHE
LEZIONE I.
PRELIMINARE.

TRa le ſcienze Matematiche non ſenza ragione ſi dà il primo luogo all' Aritmetica , come a quella , che da ſe ſteſſa ſi ſoſtiene ſenz' aver biſogno d' appoggio da alcun' altra ; laddove le altre , come la Geometrìa , la Muſica , l' Aſtronomìa , ſon coſtrette a far ricorſo a queſta ſcienza Numerale in ogni ſupputazione, che gli occorra di dover fare , in ogni Propoſizione , che abbiano da far conoſcere , o raziocinio , o dimoſtrazione , che vogliano inſtituire . Non ſi vuol giá quì mettere innanzi a chi ha ſol riguardo alla pratica ciò , che conduce alla ſpeculativa , e profonda intelligenza di queſta prima , ed Elementare Matematica ſcienza ; ma non ſi vuol per altro preſentare una eſecuzione delle Operazioni Aritmetiche così cieca , e abbandonata dalla ragione , e dal diſcorſo , che debba dirſi un mero meccaniſmo , come pur troppo ordinariamente ſi fa creder , che ſia . E queſto è finalmente il motivo per cui tanto facilmente ſi di-

menticano le regole delle operazioni Aritmetiche da chi non le tiene continuamente in pratica . E' un pretender l' impossibile , che la mente ritenga l' idea d' un determinato giuochetto di numeri , senza esser ella persuasa dalla ragione , che bisogni operare in tal maniera , e senza che vegli in essa un raziocinio, che ne conservi, e ne diriga all' occorrenza l' idea già formata .

E perchè non può mai venirsi all' intelligenza di una scienza senza saperne i termini, ed intendere il vero senso , ed indole dei medesimi , diasi quì in succinto un' idea dei termini Aritmetici , e del significato , ed uso di essi .

Il Numero si offre il primo a dover essere considerato : il quale a parlar propriamente non è altro , che una collezione di unità ; e dicesi Numero appunto dal numerare le unità , delle quali se ei ne novera una soltanto dicesi singolare , se ne contiene più d' una dicesi plurale ; Vero è che anche una sola unità non è indivisibile , ma costa di più , e meno parti secondo l' esigenza delle operazioni , d' onde hanno origine i numeri rotti , o frazioni , vale a dire parti di una unità , delle quali si parlerà in appresso . Per potere indicare con comoda , e compendiosa scrizione ciaschedun numero si servono tutti gli Aritmetici di questi dieci semplicissimi caratteri = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 0 =. Ed acciò queste medesime cifre bastino ad esprimere, e rappresenta-

tare anche le diecine, i centenari, millenari ec., gli si attribuisce il valore locale, talmentechè in una serie di più numeri insieme, e destinati ad esprimere uno, o più centenari, uno, o più millenarj di unità, l' ultimo numero alla destra, cioè in fine della scrizione esprime le unità semplici dal dieci in giù ; il penultimo esprime le diecine d' unità ; quello che segue in terzo luogo esprime i centenari d' unità, il quarto i millenarj d' unità, il quinto le diecine di migliaja, il sesto i centenari di migliaja, il settimo il millione, e così poi colla stessa regola si procede al Billione, al Trillione, Quadrillione &c., avvertendo per regogola certa, che ogni numero ha gradatamente e respettivamente un valore dieci volte maggiore di quello, che immediatamente gli segue verso il fine. Per pronunziar dunque un numero per esempio 6239 è da avvertirsi che il primo numero, o cifra dalla destra parte, che è 9. è un numero semplice di nove unità ; il 3. seguente esprime tre diecine, cioè trenta ; il terzo che è 2 vale due centenari, o sia dugento; l' ultimo, che è 6. conta per sei migliaja, o sei mila. Laonde se si repeta il valore di tutti invertendo l' ordine, e cominciando dalla prima cifra 6. a sinistra, si esprimerà rettamente il numero suddetto 6239. per seimila dugentotrentanove. Così se la somma da rilevarsi sia composta di più che quattro cifre come per esempio questa 547683. cominciando al solito ad esaminarne il valore da destra, si vedrà il 3. numero semplice di tre-

unità ; l' 8. di otto diecine , il 6. di sei centenari , o sia seicento , il 7. di sette migliaja, o settemila , il 4. di quattro diecine di migliaja , ovvero quarantamila , il 5. di cinque centinaja di migliaja , o sia cinquecento mila ; ed esprimendone tutta la somma cominciando dalla parte sinistra, o sia principio della medesima scrizione 547683. si dirà cinquecentoquarantasette mila seicento ottanta tre : Ed aggiungendosi alla sinistra un' altro numero, denoterebbe uno , o più millioni, secondo il numero di unità che contenesse il numero aggiunto , il quale se fosse 3. direbbe la somma tre millioni e cinquecento quarantasette mila seicento ottantatre ; se fosse 1. direbbe un millione , e cinquecento &c. : la cifra , o , che dicesi comunemente zero, non ha per se stessa, e separata da altri numeri , alcun valore ; prefisso per altro, interposto , o posposto ad altri numeri, ha forza di conservare ad essi il valore locale ; Così volendo esprimer *dieci* si appone il zero alla destra dell' unità in questa maniera 10. volendo far intendere , che quell' unità ha il valore di una diecina per essere in secondo luogo : così collo scriver 304. si vuol far avvertire che il 3. , computando il zero , è nel terzo luogo del centenario , e perciò varrà la scrizione trecento , (niuna diecina) e quattro unità ; E per dare un' esempio di maggior numero di cifre ; 304609. vale trecento migliaja , (niuna diecina di migliaja) quattro migliaja , sei centenari (senza alcuna diecina) e nove u-

unità ; vale a dire trecento quattro mila ſei-
cento nove .

Quando ſi tratterà delle frazioni , e Proporzioni Aritmetiche ſi avrà occaſione di avvertire tutte le altre affezioni dei numeri . Intanto re prima di venia dar le regole ſulle Operazioni Aritmetiche , biſogna quì dare una prima idea delle frazioni ſuddette , che ſono le parti dell' unità che in diverſe maniere vien diviſa talvolta , ora in più , ora in meno parti eguali , ſecondo il biſogno dell' Aritmetico . Se reſta *ex. gr.* diviſa in tre parti , una terza , o due terze parti ſi ſcrivono così $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ tre terze parti ſi ſcriverebbero così $\frac{3}{3}$, ma ſiccome equivalgono all' intera unità , ben di rado ſi troveranno ſcritte in luogo della medeſima . Se eſſa unità dovrà dividerſi in 4 , in 5 , in 6 , o in qualunque numero di parti , anche in 50. in 100. &c. ſi troveranno ſcritte tali frazioni $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{10}{50}$ $\frac{80}{100}$. e ſi leggono un quarto , due quinti , quattro ſeſti , dieci cinquanteſimi, ottanta centeſimi &c. , avvertendo che il numero poſto ſopra la linea diceſi *Numeratore* , perchè ſpiega , e numera quante parti contien la frazione delle componenti l' unità in quella determinata diviſione della medeſima : per eſempio $\frac{8}{25}$ ſpiega otto parti delle 25. nelle quali ap-

appariſce dal ſottopoſto numeto (che diceſi *denominatore*), eſſere ſtata concepita diviſa l' unità. L' indole della frazione fa veder manifeſtamente, che il Numeratore deve eſſer ſempre minore del Denominatore, altrimenti ſe foſſe eguale, come $\frac{5}{5}$, indicherebbe, non una frazione, ma un' intera unità, numerando cinque quinti d' unità, che vuol dir tutte le parti, nelle quali in quell' occaſione è ſtata diviſa l' unità: Se detto Numeratore foſſe maggiore, come $\frac{6}{5}$ ſpiegherebbe più che unità con noverare ſei quinti, de' quali cinque formano l' unità intera, come ſi è detto, avanzandone nel ſeſto quinto una quinta parte; onde in vece di ſcrivere $\frac{6}{5}$ ſarebbe equivalentemente, e più propriamente da ſcriverſi 1. e $\frac{1}{5}$. Baſterà quì aver così accennato qualche coſa sì intorno ai numeri interi, come riguardo alle frazioni per una leggiera indiſpenſabile idea per poter procedere alle Operazioni Aritmetiche sì per mezzo dei numeri interi, come delle Frazioni. E ſono = L' *Addizione*, che diceſi comunemente il *Sommare*; La *Sottrazione*; La *Multiplicazione*; e la *Diviſione*. S' incominci dalla prima.

DEL-

DELL' ADDIZIONE O SIA SOMMAZIONE

LEZIONE II.

Conſiſte queſta prima, e più facile Operazione in aggiungere la ſomma di uno, alla ſomma di un' altro numero, e farne riſultare una ſomma totale, o aggregato d' egual valore a quant' altre ſomme ſian propoſte a raccoglierſi. Se tanto queſta, quanto le altre Operazioni doveſſero aggirarſi ſu i numeri ſemplici, non vi ſarebbe biſogno d' inſtituire alcuna regola, non eſſendovi chi non ſappia combinar queſti con tutta la facilità. Chi non vede infatti, che ſe a 2. ſi aggiunge 2. ne riſulta 4.? che 3 aggiunto a 6 fa 9, che a 9 aggiungendo 8. ne vien 17.? Il biſogno pertanto di ricorrere alle regole viene dai numeri compoſti, su i quali fa l' arte Aritmetica parte per parte, e ſucceſſivamente quello che tutto inſieme, ed in un ſolo atto della mente non può eſeguirſi. Ora ſiano dati i due numeri compoſti = 1432. = e 4363. dei quali ſi voglia ſapere tutta la ſomma. Eccone la Regola Aritmetica. Scrivanſi i dati numeri l' uno ſotto l' altro in modo, che le unità ſiano verticalmente corriſpondenti alle unità, le diecine, alle diecine, i centenari, ai centenari, i millenarj ai millenarj, come appreſſo. Tirata una linea da ſiniſtra a deſtra

```
1432
4363
————
5795
————
```

ſi cominci dal raccorre le unità dalla parte deſtra, che ſono 3, e 2 le quali producendo 5, ſcrivaſi 5 ſotto la linea traſverſa alla dirittura di dette unità: ſi proceda verſo la ſiniſtra a computare le diecine 6 e 3. che facendo 9 ſi ſcriva 9 alla loro dirittura: ſi paſſi a ſommare i centenarj 3 e 4, che producon 7, e ſcrivaſi 7. ſotto i medeſimi: in ultimo luogo ſi uniſcano inſieme i millenarj 4 ed 1 e ſcrivaſi 5 ſotto di eſſi, e ſi avrà la ſomma 5795. aggregato di egual valore delle ſomme dei due dati numeri, eſſendo ſempre innegabile l'aſſioma, che il tutto è uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

Una piccola difficoltà può incontrarſi in queſta prima Operazione nel caſo, che qualche ſomma raccolta da alcuna delle Colonnette o delle Unità ſemplici, o delle diecine, o de' centenarj, o millenarj, oltrepaſſi il 9, e ſia in conſeguenza compoſta di diecine, e di unità anneſſe alle medeſime, nel qual caſo le ſole unità ſemplici ſi ſcrivono ſotto la linea traſverſa in corriſpondenza alla computata colonnetta, riſerbando il numero delle diecine per includerſi nel computo della ſeguente colonnetta verſo la ſiniſtra parte; la regola ha biſogno d'eſſere ſchiarita con un eſempio. Siano dati a computare, o ſommare gli appreſſo quattro numeri. Cominciando ſempre l'operazione dalla colonnetta delle unità ſemplici, cioè dall' ultima a deſtra, ſi dirà: 8. più 4. fa 12. più 6. fa 18. e più nove, porta alla ſomma di 27. tutta la

$$\begin{array}{r} 7439 \\ 5926 \\ 2754 \\ 9978 \\ \hline 6097 \\ \hline \end{array}$$

colonnetta, val a dire a due diecine con di più 7. unità: onde sotto la computata ultima colonnetta si deve scriver soltanto il 7. e riserbar le due diecine a computarsi coi numeri componenti la seguente colonnetta delle diecine. Queste due diecine si computano col solo numero 2, che avrebbe da se solo il semplice valore di due unità, ma computato coi numeri della colonnetta delle diecine, acquista, o ritiene con essi il valore locale di due volte dieci, o sia 20. dicasi adunque: 2. più 7. fa nove più 5. fa quattordici, più 2. fa sedici più 3. porta la somma di tutta la colonnetta a 19. diecine: scrivasi il solo 9. sotto la medesima colonnetta, e si riserbi il dieci per la seguente *colonnetta* dei centenarj, tra i numeri della quale si computa questa diecina di diecine come semplice unità, ma inclusa questa tra i numeri centenarj, ha con essi il valor locale di cento. Si proceda al computo della terza colonnetta de' centenarj, e si dica 9., e 1. che si è detto doversi quì includere dell' altra colonnetta, fa dieci; più 7, più 9, più 4, che in tutto porta la colonnetta alla somma di 30. Quì abbiamo dunque tre diecine di centinaja, val a dir tremila, che devonsi unire nel computo dell' ultima colonnetta, e scrivere sotto la computata solo il o. non avanzando alcuna unità sopra le diecine. Si passi al computo dell' ultima colonnetta, che contiene numeri millenari, ed inclusovi il 3. delle tre diecine di centenarj già riserbato, si dirà: 3. più 9. fa

do-

dodici, e con più 2, più, 5, più 7, resta esaurita tutta la colonnetta col risultato della somma 26. cioè ventisei migliaja, che bisogna scriverle totalmente per non esservi altra colonna da computare, ponendo il 6. sotto i numeri ultimamente raccolti delle migliaja, e il 2. a sinistra, col valor locale di due diecine di migliaja, e sarà la totale ed equivalente somma a tutte insieme le quattro dei dati numeri, 26097.

Per scoprire se siasi commesso qualche errore nel suddetto computo, se ne ripeta l'operazione con questa cautela: se nel sommare le colonnette si è proceduto all' insù, nel rinnovar l' operazione, che deve servir di riprova, si proceda dall' alto al basso, e risultandone anche in tal rovesciamento la stessa somma, sarà certo non esservi intervenuto errore. Si propongono varie altre regole di riprova, che si daranno, unite ad altre pratiche osservazioni, sopra ogni operazione Aritmetica, in fine di questo Trattato a scanso d' ogni più prolissa operazione.

DELLA SOTTRAZIONE

LEZIONE III.

LA sottrazione è un diminuire una data quantità, o numero, togliendogliene una parte determinata per venire in cognizione di quello che rimane alla diminuita quantità, e qual

qual sia l' eccesso della' maggiore sopra la minore, o sia la differenza tra l' una, e l' altra. Così chi da 9. toglie 4, si vede senza difficoltà, rimanerli 5; ed essere in conseguenza il 5. l' eccesso del 9. sopra il 4. e loro differenza: e così ogn' altro numero semplice maneggiasi in questa operazione senza alcun bisogno di regola. Nel caso poi di dover operare su i numeri composti di diecine, centenarj &c. si osservi per regola; Che il numero, che vuol sottrarsi dev' esser già minore dell' altro, dal quale si deve sottrarre; e deve scriversi il minore sotto il maggiore in modo, che i numeri, o cifre dell' uno, e dell' altro si corrispondano secondo il valore locale, cioè le unità semplici sotto le unità, le diecine sotto le diecine, i centenari sotto i centenari &c.; Indi tirata la linea trasversale sotto detti numeri, si noti sotto le respettive colonnette l' eccesso delle unità, diecine, centenari &c. del numero superiore, sopra le unità, diecine, centenarj &c. del numero inferiore, e si avrà per prodotto l' eccesso di tutto il numero maggiore sopra il minore, e la differenza conseguentemente tra l' uno, e l' altro.

Debba sottrarsi per un esempio il numero 2453. dal 5796. Scritto il minore sotto il maggiore come quì si vede, s' incominci l' operazione dalla parte destra, cioè dalle semplici unità, e si dica: se da 6. si leva 3 rimane 3: e si scriva sotto l' unità questo numero 3: si venga all' altra colonnetta delle diecine, e dicasi: se da 9. si toglie 5. resterà 4. che scritto sotto le diecine,

$$\begin{array}{r} 5796. \\ 2453. \\ \hline 3343 \\ \hline \end{array}$$

ſi proceda alla colonnetta dei centenarj, e da 7. togliendo 4. ſi ſcriva il 3. che rimane ſotto i medeſimi centenarj; e ſi venga all' ultima colonnetta dei millenarj da 5. togliendo due, e ſi noti il reſiduale 3. ſotto la medeſima colonnetta; ed ecco il numero 3343. total reſiduo del numero maggiore 5796., e differenza, o ecceſſo di queſto numero maggiore ſopra il minore: Nè può eſſere altrimenti, avendo tolto da queſto maggior numero tante unità, tante diecine, tanti centenarj, e tante migliaja, quante ſe ne contengono nel numero minore.

La maggior difficoltà in queſta operazione incontraſi quando qualche numero d' unità, di diecine, di centenarj &c. è nel numero inferiore maggior delle corriſpondenti nel numero di ſopra, al quale in queſto caſo deveſi aggiungere una diecina; e così rendere ingegnoſamente maggiore il numero ſuperiore dell' inferiore, e notarne ſotto ſecondo la preſcritta regola, il reſiduo. Acciò poi ſegua la giuſta compenſazione di queſta diecina; il numero, che immediatamente ne viene verſo la ſiniſtra da diminuirſi, deve conſiderarſi di un unità di meno.

Sia per eſempio da ſottrarſi dal numero 73629. l' altro numero 45367: ſi deſcrivano, come ſi è detto, il maggiore ſopra il minore. Chi dunque di 9. leva 7. reſta 2. ſi ſcriva queſto reſiduo al ſuo luogo ſotto la linea; e ſi paſſi alla ſeconda colonna, ove da 2. levar 6. è impoſſibile; il maggior numero dal minore:

73629.
45367.

28262.

per-

perciò è tempo quì di mettere in pratica la data regola aggiungendo 10. a quei 2. e dire se da 12 si leva 6 resta 6 si scriva sotto la propria colonna delle diecine 6, e si passi a quella dei centenarj, nella quale si trovano 6 centenarj nel numero superiore, e 3. nell' inferiore, ma per compensar la diecina presa, ed inclusa nella colonna delle diecine, non bisogna dire chi da 6 leva 3, ma chi da 5 leva 3 togliendo al 6 un unità; E sarà giusta la compensazione sebbene siasi preso dieci, e si rilasci uno soltanto, poichè il dieci si è unito alle diecine, ed ha difatto ottenuto il valore di dieci diecine: il toglier poi quì uno solamente, perchè si toglie ai centenarj vale un centenario, e in conseguenza, dieci diecine compensative delle già prese. Chi dunque da 5 leva 3. resta 2 da scriversi al suo luogo de' centenarj sotto la linea. Anche nella colonnetta de' millenarj abbiamo quì il caso di non poter levare da un numero minore il maggiore, onde in luogo di dire, chi da 3. leva 5 bisognerà con aggiunger 10., dire chi da 13 leva 5 rimane 8 che scrivasi sotto la linea alla dirittura dei millenarj, e si passi all' ultima colonnetta delle diecine di migliaja, dal numero superior della quale bisogna sottrarre un unità compensativa della diecina, di cui si è profittato nella passata colonna delle migliaja, avendo qui essa unità il local valore di dieci mila; e dire, non chi di 7 ma chi di 6 leva 4 rimane il residuale 2 che scritto al suo luogo sotto la linea,

da-

darà unito agli altri il totale residuo 28262 eccesso dell' maggior numero, sopra il minore; Il quale residuo, (se si voglia far riprova sull' esattezza dell' operazione) si aggiunga, e si sommi, per la regola data nell' Addizione, col numero minore dato a sottrarsi; e se ne risulterà una somma eguale al dato numero maggiore, la sottrazione sarà stata fatta esattamente.

Perchè poi un Principiante non debba prendere sbagli nell' incontro di zeri, tanto nel maggiore, che nel minor numero, come ancora nel caso che la somma del minore sia composta di minor numero di cifre, potrà regolarsi per ogni possibil caso con i qui addotti esempj.

	48500. 402.	50000. 30000.	56078. 1003.	489249. 299999.
Residui	48098.	20000.	55075.	189250.
Riprove	48500.	50000.	56078.	489249.

Se accadesse di dover sottrarre molte volte un medesimo numero da un istesso molto maggior numero, per rilevare quante volte esso minor numero si contenga nel maggiore, si deve usar la sottrazione compendiaria, che tra le operazioni Aritmetiche dicesi divisione, della quale si tratterà a suo luogo.

DEL-

DELLA MOLTIPLICAZIONE

LEZIONE IV.

VI ha chi ha definito la Moltiplicazione una replicata, e composta Addizione; ma più espressamente però, e più propriamente potrà dirsi un' operazione Aritmetica, per cui, senza un lungo calcolo si rileva la somma di un dato numero anche le cento, e mille volte aggiunto a se stesso. Come ex. gr. chi volesse sapere qual somma risulti dal numero 17. preso 16. volte, se dovesse ricorrere all' Addizione bisognerebbe, che 16. volte scrivesse uno sotto l' altro il 17. per raccorne la total somma, che per via della multiplicazione si trova senza tanto imbarazzo di scritto.

La multiplicazione dei numeri semplici non merita prescrizione di regola, ben vedendosi da chiunque che *ex. gr.* 2 multiplicato per 3 o sia due volte 3 fa 6 tre volte 7 fa 21 tre volte 8. 24. &c. Trattandosi poi di numeri composti bisogna osservare primieramente, che dei due numeri, su i quali si fa l' operazione, l' uno si chiama *multiplicatore*, ed è ordinariamente il minore, e scrivesi sotto l' altro maggiore, che dicesi *multiplicando*, con osservare che le respettive unità, diecine, centinaja, migliaja &c. vicendevolmente si corrispondano, acciò non resti alterato il valore locale o dell' une, o dell' altre. Se il multiplicatore è composto di più numeri, dovrà replicarsi l' opera-

 zio

zione ſul numero multiplicando tante volte, quanti numeri avrà il multiplicatore: val' a dire, con ciaſcun numero ſeparatamente di eſſo multiplicatore, cominciando da deſtra, cioè dalle unità, ſi devono multiplicare tutti i numeri del multiplicando l' uno dopo l' altro, e ſcriverne ſotto la linea il riſultato parziale: e ſaranno in conſeguenza tanti queſti parziali riſultati, quanti ſaranno i numeri componenti il multiplicatore. Raccolta finalmente la ſomma di eſſi riſultati per la regola di Addizione, ne verrà una ſomma totale, che ſi dice il *Prodotto*, il quale contiene la ſomma del numero multiplicando preſo tante volte, quante ſon le unità, che contiene il multiplicatore. Qui un eſempio ſpiegherà aſſai più di qualunque eſteſa ſpiegazione in aſtratto. Sia queſto primo eſempio di numeri compoſti ſolo di unità, e diecine: Il multiplicando ſia 32, e il multiplicatore 24 Scritti queſti numeri, come qui ſi vede, il 32 ſi multiplica prima per 4 dicendo 4 via 2 oppur 2 via 4 (che è più comodo, e produce l' iſteſſo effetto) fa 8, e ſcriveſi 8 ſotto il medeſimo numero 4 del multiplicatore, avendo queſt' 8 ragione di otto unità ſemplici. Indi ſi proſegue, 3 via 4 fa 12, e ſi ſcrive totalmente il 12 non eſſendovi nel multiplicando altro numero da multiplicarſi per il 4 del multiplicatore, oſſervando di collocare il 2 ſotto le diecine, e l' 1. in fuori a deſtra, perchè è centenario. Ora ſi deve proſeguir l' o-

```
  32.
  24.
 ----
 128.
 64.
 ----
 768.
 ----
```

operazione multiplicando il medesimo 32. per il primo numero del multiplicatore, che è il 2 a dire: 2 via 2 fa 4, e scriver 4 sotto il 2 del multiplicatore, contenendo, non 4. unità, ma 4 diecine essendoche il 2. primo numero del multiplicatore ha il valor di venti: e se in luogo di multiplicar compendiosamente 2 via 2 si fosse dovuto multiplicar questi due numeri secondo il loro valore, si sarebbe detto *venti* via *due*, o 2 via 20. che produce 40. valore di quattro diecine, come si è osservato valere il 4 scritto, come sopra. Anche il 3 primo numero del 32. *multiplicando*, se si dovesse multiplicare pel suo valore per il 2. del multiplicatore, preso anch' esso secondo il già detto suo valore di 20. si direbbe 20. via 30. che fa 600.: ma l' Aritmetica insegna a dir compendiosamente 2 via 3 fa 6 e questo 6. che deve scriversi nel luogo dei centenarj, come si vede nell' addotto esempio, ha appunto ragione a 600. Si raccolgano finalmente insieme per *Addizione* queste due somme risultate dalle due fatte operazioni, e se ne vedrà la somma totale 768., che è il prodotto della fatta multiplicazione.

Sarà ora opportuno un altro esempio più complicato, ed esteso a numeri più composti. Sia da multiplicarsi il numero 39042.

per il multiplicatore 753. Qui si deve dunque far vedere qual somma produca il detto numero 39042. replicato 753. volte. Per ottener ciò, essendo tre i numeri componenti il multiplicatore 753., si ha prima da moltiplicare tutto il 39042. per l' ultimo del multiplicatore, che è 3, indi per 5 finalmente per 7 e dire: 3 via 2 fa 6 scrivesi 6 sotto il 3 cioè col valore locale di 6 unità, interposta al solito la linea; indi dicasi: 3. via 4. (*che vuol dir* 3 *via* 40.) fa 12. e si scriva il solo 2 accanto al 6. nel luogo delle diecine, e si riservi 1: procedendo innanzi, ne viene 3 via 0. (*che vuol dir tre via nulla, o tre via niun centenario*) dal che nulla realmente producendosi, si mette in conto l' 1 riservato, e si scrive sotto nel luogo dei centenarj, ed ha in fatti il valor di 100, essendo stato riservato sopra in conto di 10 diecine. Ne viene da multiplicare inseguito il medesimo 3. nel 9. che produce 27. (*e son* 27. *migliaja, attesoche il* 9 *ha il valor locale de' millenarj semplici*) scrivasi il solo 7 come vedesi nell' esempio, ove ha il valor locale di 7000. e si riservi ventimila, cioè il numero 2 che monta quì a tal valore, e multiplicato per l' ultima volta il 3 nel 3 del *multiplicando*, che produce 9, si unisca a questo il 2 riservato, e farà 11, che scrivesi sotto totalmente non rimanendo nel *multiplicando* altro numero da multi-

```
     39042.
       753.
   --------
    117126.
   195210.
  273294.
  ---------
  29398626.
```

ti-

tiplicarsi nel 3. Questo numero 11. è manifesto esser quì in ragione di centodiecimila, giacchè il 3 ultimo numero nel *multiplicando* ha il valore di trentamila; multiplicato in 3 o sia preso tre volte, monta a novantamila, aggiuntovi il ventimila espresso per il numero 2. riservato, come si è detto, và alla detta somma di centodiecimila. E tutto questo primo parziale prodotto della multiplicazione fatta per 3. ascende, come può vedersi, alla somma di centodiciassettemila centoventisei.

Si passi a multiplicar di nuovo tutto il numero 39042. per il secondo del multiplicatore, che è 5: E dicasi: 5 via 2 fa 10 scrivasi il solo zero e si riservi 1 Osservando di collocare detto zero sotto il medesimo 5 *multiplicatore*, val a dire in riga delle diecine, atteso che quel 5 ha tra gli altri due numeri del *multiplicatore* il valore di 50., e il dir, come si è detto nel multiplicarlo nel 2 *due via cinque* tien luogo di *due via cinquanta* che produce 100., e cento si vedrà ora contar il numero 1. che si è riservato, perocchè proseguendosi a multiplicare il medesimo 5 nel 4 che produce 20. e aggiuntavi l' unità riservata, che lo rende 21., è cosa manifesta valer questo numero, 21 centenari, come quello che procede, non dal semplice 5. multiplicato per 4, ma da 50. per 40., che produce 20. centenarj, siccome il medesimo 50. per 2 avea prodotto il centenario, che ora devesi scrivere per mezzo del numero 1. nella riga dei cente-

narj, e riservare il 2. spiegante 20. centenarj, o sia duemila da collocarsi al proprio luogo de' millenarj semplici in conseguenza della multiplicazione, che si dee fare sul numero che ne segue; ma siccome ne segue il zero nel *multiplicando*, e 5 via 0, ovvero 50 via 0 fa l' istesso nulla, dovrà scriversi nel prodotto il solo riservato 2 in riga de' millenarj semplici e proseguir la multiplicazione del 9 per l' istesso 5 (*che è quì l' istesso*, *che dire* 9000. *per* 50.), e dire: 5. via 9 fa 45. (cioè *quattrocentocinquantamila*). Il cinquantamila per mezzo della sola cifra, o numero 5 scrivasi nel prodotto in riga delle diecine di migliaja, e si riservi il 4, (*significante*, *come si è detto*, *quattrocentomila*) indi si passi alla multiplicazione del 3 ultimo numero del *multiplicando*, che vale *trentamila*, e dicasi: 5 via 3 (*val a dire* 50. *via* 30000.) fa 15. (*cioè un milione*, *e cinquecento mila*) aggiungasi al 15. il 4 che si era riservato (*che vale quattrocento mila*) e farà 19. da aggiungersi totalmente al prodotto, giacchè non vi ha altro numero nel *multiplicando*; Il significato quì del 19. sarà dunque. Un millione, e novecento mila: E tutto il prodotto di questa seconda multiplicazione ascende a un milione, e novecentocinquantaduemilacento. Nè si abbia riguardo, che nei numeri dell' apportato esempio manchi a questo secondo prodotto l' ultimo zero, e al terzo ne manchin due, poichè è cosa costantemente sicura, che quando si multiplica per il numero delle diecine

ne del multiplicatore, il numero del risultato, che dovrebbe porsi sotto le unità semplici è sempre un zero: Quando si multiplica per il numero dei centenarj, devon esser zeri gli ultimi due numeri del risultato delle unità, e delle diecine: Multiplicando per il numero de' millenarj, tre sarebbero i zeri in fine del prodotto, cioè in riga de' centenarj, delle diecine, e delle unità. Non vi si sogliono scrivere per non indur confusione all' operazione, bastando collocare gli altri numeri successivamente, e regolarmente secondo il loro valore locale.

Resta finalmente da multiplicar per la terza volta il numero 39042. per il numero 7 del *multiplicatore* 753. che ognun vede, valer 700. dirassi dunque: 2 via 7 fa 14 (*cioè due via settecento, millequattrocento*) Scrivasi il solo 4 per il primo numero del terzo prodotto, e si scriva in riga del 7 del multiplicatore, val a dire nel luogo dei centenarj, valendo 400. e si riservi 1 (*che val mille*) e si passi a multiplicare il secondo numero 4, dicendo: 4 via 7. fa 28: (*cioè quaranta via settecento fa vent' ottomila*) si ripigli 1 riservato di sopra del valor 1000., e si dica 29. si scriva il solo 9 in riga de' millenarj semplici nel prodotto, valendo, come si è osservato, 9000. e si riservi il 2, che val ventimila, da collocarsi nel luogo delle diecine di migliaja, multiplicato che siasi il seguente numero, che essendo zero, e 7 via 0., (o 700. via o) facendo sempre nulla, potrà solo

ſolo ſcriverſi nel prodotto nella detta riga di diecine di migliaja il riſervato 2. del detto valore di 20000. Paſſando quindi a multiplicare il penultimo numero del multiplicando, ſi dirà: 7. via 9. fa 63. (*cioè ſecondo il vero valore 700. via 9000., che fa ſei milioni, e trecento mila*) ſcrivaſi pertanto in riga delle centinaja di migliaja nel prodotto, il ſolo 3. (*che val trecentomila*) e ſi riſervi il 6. (*che come ſi è detto val ſei milioni*) per aggiungerlo alla multiplicazione dell' ultimo numero, che è 3 nel *multiplicando*: e dicaſi: 3 via 7, fa 21 (*cioè 700. via 30000. fa vent' un milioni*) ſi aggiunga al 21 il 6. riſervato, che fa 27. (*milioni*) ſcrivaſi tutto il 27 non eſſendovi altro numero da multiplicarſi, oſſervando di ſcrivere il 7 in riga dei milioni ſemplici, e il 2 in riga delle diecine di milioni. La ſomma di queſto terzo prodotto ſarà dunque ventiſette milioni trecento ventinove mila quattrocento. Raccolganſi tutti in una ſomma per la regola di Addizione i tre prodotti, e ne verrà il total *Prodotto* della multiplicazione, e ſi vedrà, che 753 volte 39042. produce

ventinovemilioni trecento novant'otto mila ſeicento ventiſei.

2 9 3 9 8 6 2 6

E' da oſſervarſi per ultimo nella multiplicazione, che ſe o il multiplicatore, o il multiplicando, o tanto l' uno, che l' altro abbiano in fine uno, o più zeri, ſi può abbreviare l' operazione ſenza alterazione alcuna nel prodotto,

la-

lasciando i detti zeri, e multiplicando solo gli altri numeri, come *ex. gr.* se si dovesse multiplicare 416000. per 12700., basterà multiplicare 416. per 127, purchè al total prodotto si aggiungano poi in fine tanti zeri, quanti ne avevano i due numeri multiplicatore, e multiplicando insieme; come dunque nell' addotto caso ne avea 3. il multiplicando, e due il multiplicatore, bisognerebbe al total prodotto, che sarebbe 52832. | 00000 | aggiungere cinque zeri. Chi vorrà far prova se può veramente abbreviarsi così l' operazione, senza pregiudizio della verità, può far detta operazione tutta estesa, e troverà che è inutile la computazione di questi zeri.

Chi poi vorrà far riprova su qualunque fatta multiplicazione, per assicurarsi di non aver fatto errore, dovrà ripeterne l' operazione con permutare i numeri, e prendere il multiplicatore per il multiplicando, o per maggior sicurezza dividere il prodotto per il multiplicando, per la regola da assegnarsi quì ora, e se si ha per *quoziente* il multiplicatore, l' operazione è retta.

DELLA DIVISIONE

LEZIONE V.

LA Divisione può anche dirsi una Sottrazione in compendio, per mezzo della quale si toglie quante volte si può una quantità, o un numero da un' altro ad oggetto di venire in cognizione di quante volte precisamente uno si contenga nell' altro.

Trattandosi di numeri semplici, non vi ha bisogno d' invenzioni artificiose, e di regole, poichè *ex. gr.* ognun vede quante volte il 4 si contiene nell' 8, quante nel 12, essendo facile mentalmente il vedere, che sottraendo 4 da 12 rimane 8, e che togliendo dall' 8. un' altra volta il 4 riman 4, e che in conseguenza tolto dal 12 tre volte il 4 resta esaurito senz' alcun residuo, e che dunque nel 12 si contien tre volte il 4. Ma trattandosi di numeri composti, e di diecine, e di centenarj, e millenarj, troppo prolisso sarebbe un tal metodo: onde è sommamente espediente di valersi di più compendiosa Operazione, quale è la *divisione*, per speditamente trovare quante volte in un dato numero, (che dicesi il *dividendo*) si contenga un' altro dato numero (che chiamasi *divisore*). Il numero poi esprimente quante volte il *divisore* si contenga del *dividendo* si dice *quoziente*. Nel sopra accennato esempio il *dividendo* è 12, il *divisore* è 4, e il *quoziente* è 3. Dal che si deduce che il *divisore* si contien tante volte nel *dividendo*, quante son le unità, che compongono il *quoziente*; E in conseguenza il *divisore* preso tante volte quante sono unità nel *quoziente*, deve essere eguale al *dividendo*.

E quì è opportuna cosa l' osservare, che non tutti i numeri son composti di tal proporzionalità di parti da potersi dividere in una quantità di date porzioni, e restare esattamente esauriti. Tra quelli che possono così esatta-

men-

mente dividerſi , ſenza che reſti alcun reſiduo è *ex. gr.* il 24 che ſe vuol dividerſi per tre , otto volte 3 lo eſauriſce , ſe per 8, tre volte 8 pur lo eſauriſce, ſe per 6 , quattro volte 6 lo rende egualmente eſaurito , così dicaſi di un gran numero di altri : Ma ſe per eſempio vogliaſi dividere 9 per 4 laſcierà il reſiduo di una unità prendendo per *quoziente* il 2 , cioè due volte 4 . Prendendo il 3 per *quoziente* cioè 3 volte 4 ſi prendono tre unità più, che non ha il 9 *dividendo* ; Ma propongaſi prima un' eſempio di qualche numero, che poſſa dividerſi, ſenza che vi rimanga reſiduo, in un numero di date parti ; e quindi ſi verrà a proporne anche altro ſopra numeri non eſattamente diviſibili , per aſſegnarne la regola da tenerſi in tali circoſtanze . Sappiaſi però prima di tutto , che in tutti i caſi la *diviſione* ſi eſeguiſce con tre ſucceſſive operazioni .

In primo luogo il numero *dividendo* , o da dividerſi, che ſi ſuppone già eſſer ſempre il maggiore, deve eſſer diviſo per il *diviſore* per ottenere il *quoziente* :

Per ſeconda operazione biſogna per il *quoziente* multiplicare il *diviſore* per avere il *prodotto* .

Per ultimo biſogna ſottrarre queſto prodotto dal numero *dividendo* per conoſcere ſe vi rimane alcun reſiduo .

Sia per un eſempio il più ſemplice , da dividerſi 42 per 7 , ſi ſcrivano queſti due nume-

meri come si può veder quì, e trovato quante volte il 7 *divisore* entra nel 42 *dividendo*, che vi

dividendo 42.	6. *quoziente*
	7. *divisore*

entra 6 volte, scrivasi questo quoziente 6 sopra al divisore 7, che bisogna multiplicare per esso quoziente, e il prodotto, che è pur 42. dovrebbe scriversi sotto il dividendo per sottrarlo dall' istesso, ma vedendo non rimanervi alcun residuo, si dirà assoluta la *divisione* senza la terza operazione, avendo ottenuto quanto si ricercava, che 6 son le parti di 42, che esattamente contengono 7 unità per ciascheduna, onde se fossero 7 persone, tra le quali si dovessero dividere in porzioni eguali *ex. gr.* 42 scudi, ne verrebbero 6 per ciascheduno.

Se poi *ex. gr.* fosse dato a dividersi per 7 il 25, veduto, che nel *divisore* 25 stà il 7 meno di 4 volte, e più di 3, si deve prender per quoziente il 3 non il 4, e multiplicare il divisore 7 per il quoziente 3, e il prodotto 21 si scrive sotto il *dividendo*, dal quale sottraggasi, e si troverà rimaner 4 di residuo, il quale se si volesse suddividere in 7, bisognerebbe ridurlo a frazioni, delle quali fosse *denominatore* il *divisore* 7, talmentechè le 4 unità di residuo

25	3
21	—
—	7
4	

si enunciassero ciascuna per $\frac{7}{7}$ e tutte insieme $\frac{28}{7}$ ed allora diviso il 28 per 7, che vi sta 4 volte, si vedrebbe subito, che se le unità conte-

tenute nel *diviſore* foſſero perſone, tra le quali doveſſer dividerſi i quattro reſiduali, o ſcudi, o lire, o altra coſa che foſſe, ne verrebbe $\frac{4}{7}$ per ciaſcheduno, cioè 4 ſettime parti, che ſe foſſero di ſcudo ſarebbero 4 lire.

Ma diaſi ormai un eſempio della *diviſione* in numeri compoſti di centenari, e millenarj, e che ſchiariſca ogni difficoltà.

Sia dato a dividerſi il numero 234586. per 465. Biſogna prima dividerlo in più membri, per render più ſemplice, e facile l' operazione: E perchè la *diviſione*, ſi eſeguiſce, non cominciando, come nelle altre tre ſpiegate operazioni, dagli ultimi numeri a deſtra, cioè dalle unità, ma da' primi a ſiniſtra: per il primo membro, ſul quale dovrà eſeguirſi la prima diviſione, ſi dovranno prendere i primi quattro numeri, perchè prendendone ſoli tre ſi vede ſubito non adequare eſſi, non che ſuperare la ſomma del *diviſore* eſſendo in fatti più 465. che 234: E' vero, che nè quei primi tre numeri dicono *dugento trenta quattro*, nè quei quattro, che hanno da coſtituire il primo membro dicono = *duemila trecento quaranta cinque* = ma bensì = *dugento trentaquattro mila cinquecento ottanta ſei*, compreſi i due ultimi numeri. E' per altro

2345,86	504
2325	465
2086	
1860	
226	

tro ingegnosa invenzione nata dalla numerica proporzione, che costantemente dalle diecine, alle centinaja, alle migliaja, alle diecine di migliaja, alle centinaja di migliaja &c. cresce gradatamente, (aggiungendo in fine sempre un numero di più), in ragion di dieci, il prender i primi numeri del *dividendo*, se son tre in significato di centenari semplici, se quattro in senso di semplici millenarj. Così nel nostro esempio i quattro primi numeri 2345, presi così divisi in significato di *duemila trecento quarantacinque*, smontano, diciamo così, da tante potenze, o gradi, quanti sono i numeri, che gli sono stati tolti in fine: quì son due, cioè, 86; dunque da due potenze smontano i primi quattro computati separatamente, cioè dalle centinaja di migliaja, dove portano tutti i sei numeri computati insieme; e dalle diecine di migliaja, che sarebbe la somma di cinque, tolto solamente l' ultimo numero; e si riducono alle semplici migliaja tolto anche il quinto, come si è detto. Ora purchè nel decorso dell' operazione si mantenga a tutti i numeri il loro valore locale, si consideri pure ogni membro, che si adoprerà nella divisione per quello che significa esso solo indipendentemente dagli altri annessi numeri, e l' operazione riuscirà giusta; potendosi restar pienamente persuasi dalla ragione, che se ne rileverà, trovato che abbiamo il *quoziente* del primo membro. Si venga dunque all' operazione. Si è detto che il *divisore* è il 465. vedasi quante

te *volte* questo entri nei ridetti primi 4 numeri del *dividendo* : Nè bisogna già dire quante volte il 465 entri nel 2345 . nò : basta prendere i soli centenari, e consideratili come se fossero numeri semplici, dire quante volte il 4 entra nel 23 ? (*che vuol dire 4 centenarj, in 23. centenari*) e trovato entrarvi 5 volte, senza pensar niente per ora ai residui, scrivasi questo 5 per il primo numero del *quoziente* : E quì è ora da osservarsi, e rilevarsi la ragione, dalla quale si è detto dover nascere la persuasione di operar rettamente . Questo semplice numero 5 perchè sia il vero *quoziente* del primo membro del *dividendo* bisogna farlo salire a tante potenze, multiplicandolo successivamente per 10, da quante si è smontato il numero *dividendo* ; Questo si è detto essere smontato due gradi, cioè dalle centinaja di migliaja, alle diecine di migliaja, e da queste alle migliaja semplici : due gradi dunque, o potenze bisogna far salire il 5 dicendo : 10 via 5 fa 50, e 10 via 50 fa 500, siccome appunto per restituire al suo significato i primi due numeri del fissato primo membro del *dividendo*, bisognerebbe dire 10 via 2300 fa 23000, e 10 via 23000 fa 230000, che è la vera indole d' un numero composto di 6 cifre, qual è il nostro *dividendo* . Tengasi in somma per regola certa, che se i numeri finali del *dividendo* separati dal primo membro sono 2, il *quoziente* (sebbene scrivasi sempre con un numero di semplici unità) è in ragion di die-

ci-

cine; se son due, in ragione di centenari: se son tre, è in ragione di millenari semplici; se fosser quattro, sarebbe in ragione di diecine di migliaja, e così procedendo alle centinaja di migliaja, se fosser cinque. E il primo membro del *dividendo* al contrario devesi considerare smontato da tanti gradi o potenze, quanti sono i numeri, che seguono dopo detto primo membro. Ripigliando ora l' operazione, si era trovato esser 5 il *quoziente* del primo membro. Per tal *quoziente* bisogna multiplicare il divisore 465, ed avutone il prodotto 2325 scrivasi questo sotto il medesimo primo membro del *dividendo*, con esatta corrispondenza d' unità, ad unità, diecine, a diecine &c. sottraggasi questo prodotto dall' istesso primo membro per la regola prescritta per la *sottrazione*; scrivasi il residuo 20 in riga delle diecine, ed unità semplici de' numeri superiori; ed è questo 20 (*che è per altro in suo vero significato* 2000). l' eccesso del membro del *dividendo* sopra il prodotto della multiplicazione del *divisore* per il *quoziente*.

Ora perchè questo residuo, che giova, come si è detto, per facilitar l' operazione considerarlo soltanto per 20, non può dividersi, essendo il divisore molto maggiore, gli si unisca a destra il primo de' numeri, che seguono al primo membro del *dividendo* che è 8, e si veda se il *divisore* entra alcuna volta in questo numero 208; ma siccome anche dopo aggiuntovi l' 8 egli è sempre minore del *divisore* medesimo,

si

si scriverà alla destra del *quoziente* 5, un zero, e si aggiungerà al 208 anche l' ultimo numero del *dividendo*, che è 6: ed ecco composto un nuovo, ed ultimo membro del dividendo medesimo, che è 2086. Or vedasi quante volte il divisore 465 entri in questo numero 2086, e stando sempre alla sopra prescritta regola, si considerino soltanto i centenari dell' uno, e dell' altro; si veda quante volte si contenga il 4 nel 20; e siccome vi si contiene cinque volte, dovrebbe scriversi 5 per ultimo numero del quoziente, ma poichè multiplicato questo per il divisore produce 2325, numero maggiore del 2086 ultimo membro da dividersi, bisogna prender il 4 nel 20, non cinque, ma sol quattro volte, e multiplicato per 4 il divisore, dà per prodotto 1860, che scritto sotto detto ultimo membro, si sottragga dal medesimo, e ne verrà il residuo 226, al quale non essendo più da aggiungere altro numero del *dividendo*, e non essendo, non pur maggiore, ma non adequando neppure il *divisore*, si dirà compita l' operazione, avvertendo soltanto, che se questo residuo 226 volesse, o dovesse suddividersi, bisognerebbe, (trattandosi di moneta) se fossero scudi, ridurli a lire, multiplicandoli per 7 se fosser lire ridurle a soldi, multiplicandoli per 20 &c. ed instituir nuova operazione.

E' poi per ultimo da notarsi, che qualche volta accade quello, che è qui accaduto nella divisione dell' ultimo membro, nel quale sebbene entrasse 5 volte il divisore, è

bisognato contar, che vi stia sol quattro volte, poichè nella multiplicazione del *quoziente* 5 che pareva il vero nel *divisore* ne veniva un risultato di maggior somma del *dividendo*. Nè può maravigliarsene chi considera, che del *divisore* si prendon solamente i centenari per esplorare quante volte stia nel *dividendo*: E' vero, che ancora del *dividendo* si considerano i soli centenari, ma le diecine, che sono nel dividendo dopo i centenari non si multiplicano, come si fa a quelle del *divisore* per il *quoziente*. Così nel caso nostro il divisore oltre ai 4 centenari contiene 6 diecine, e 5 unità, vale a dir 65, che multiplicato per 5 porta esso solo alla somma 325. Per regola dunque quando il trovato *quoziente* multiplicando il divisore, dà un prodotto maggior del *dividendo*, bisogna supporre essersi dato troppo ad esso *quoziente*, e diminuirlo perciò ordinariamente di un' unità.

Si osservi di volo quest' altro esempio di divisione. Si vede già qui il membro di 4 numeri, che prendesi in primo luogo a dividersi per il *divisore*, 753 ed eccoci subito al caso, che entrando il 7 nel 29 4 volte, non bisogna prender per quoziente 4, ma 3, attesochè prendendo 4, e moltiplicando per esso il divisore, porta un pro-

```
2939,8626 | 39042
2259      |-------
-----     |  753
 6808
 6777
-----
  3162
  3012
-----
  1506
  1506
-----
     0
```

dotto di 3012, numero maggiore del dividendo, si prende adunque 3 per *quoziente* e multiplicato per esso il divisore, ne vien la somma 2259, che sottratta dal membro dividendo dà il residuo, o eccesso del *dividendo* medesimo 680, che non servendo per formar altro membro da dividersi, vi si aggiunge in fine l' 8, primo numero tra i seguenti il primo membro del *dividendo*: e dividesi per il medesimo *divisore* 753 e trovato entrar il 7 nel 68 (*val a dire il* 700, nel 6800,) 9, volte; scrivesi 9 dopo il 3 del *quoziente*, e si multiplica il divisore per esso 9, e scritto il prodotto 6777, sotto il diviso nuovo membro 6808, si sottrae, e l' eccesso di esso membro, che è 31 si nota sotto la linea in riga di millenarj semplici rapporto a tutto il numero *dividendo*. Aggiunto quindi il 6, numero centenario del *dividendo*, al 31 (*che val però trentunmila*) residuo della fatta divisione, si troverà, che dovendo esso per ora far la figura di 316, non contiene alcuna volta il *divisore*, e perciò si deve scrivere zero nel terzo luogo del *quoziente*: E per finir di formare un terzo membro capace d' esser diviso dal *divisore* 753, si aggiunga 2 per ultimo numero del *dividendo*, e formato così il nuovo membro da dividersi che è 3162, dicasi, il 7 nel 31 vi sta 4 volte, scrivasi 4 nel quarto luogo del *quoziente*, per esso multiplicato il solito *divisore*, si ha per prodotto 3012, sottraesi questo dal superior membro 3162, e scrivesi sotto la linea il residuo, o eccesso 150 in riga di migliaja,

 cen-

centinaja, e diecine, ed aggiuntovi 6 ultimo numero del totale *dividendo*, sarà composto l' ultimo membro divisibile, nel quale sta il divisore due volte; scritto dunque 2 in ultimo luogo nel *quoziente*, e multiplicato per esso il *divisore* si ha un prodotto interamente eguale all' ultimo diviso membro, dal quale in conseguenza non essendo da sottrarre numero alcuno, resta perfetta, ed esatta la divisione senz' alcun residuo.

Per assicurarsi d' aver operato rettamente nella *divisione*, prendansi nell' ultimo addotto esempio i prodotti della multiplicazione del *divisore* per i successivi numeri del *quoziente*, e si sommino insieme, e risultandone la total somma eguale al *dividendo* proposto, come quì vedesi, si resterà certi d' aver operato senz' errore. E per una riprova più semplice, si multiplichi il *quoziente* per il *divisore*, che deve dar per prodotto il *dividendo*. E in altri casi di operazione, nei quali succeda rimanervi qualche residuo del proposto numero dividendo dopo aver compita l' operazione; si osservi, che tal residuo deve includersi nella total somma dei prodotti: sia dell' una, sia dell' altra riprova.

```
2259
 6777
  3012
   1506
--------
29398626
```

DELLE FRAZIONI
O SIA DE' NUMERI ROTTI

LEZIONE VI.

PRima di venire alle operazioni Aritmetiche delle frazioni, o numeri rotti, è necessario

aggiunger quì alla nozione generale, che se n' è data nella lezione preliminare, le regole per le varie necessarie riduzioni delle medesime frazioni. E prima di tutto bisogna qui rammentarsi, che il numero sopra la linea della frazione è il *numeratore*, e quello, che sta sotto detta linea dicesi, *denominatore*: per esempio nella frazione di due terzi d' unità, che scrivesi così $\frac{2}{3}$, il 2 è *numeratore* perchè dà il numero di quante parti contien la frazione delle tre, nelle quali intendesi quì divisa l' unità: E il 3 è il *denominatore*, così detto perchè dimostra in quante parti uguali sia nell' occorrente caso divisa l' unità, come nell' allegata frazione col 3 da a conoscere il denominatore, che l' unità è divisa in tre uguali parti.

Quando occorrono più frazioni da doversi computare, e che non hanno l' istesso denominatore, vale a dire, che contengono varie porzioni di unità, ma non divise nel medesimo numero di parti *ex. gr.* $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{8}$ accade talvolta, come nei quì addotti esempj, di non saper distinguere la maggior frazione, dalla minore, di non poterle computare insieme, e non potervi in somma far sopra le occorrenti operazioni: E bisogna per tal motivo ricorrere alla riduzione di esse frazioni, richiamandole per le regole, che as-

se-

ſegneremo, all' iſteſso *denominatore*, e alla poſſibile ſemplicità.

Siano *ex. gr.* le due frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ di *denominatore* diverſo, avendo l' una 2, l' altra 4. Due ſono i modi equivalenti per ridurle al medeſimo denominatore. Il primo è di multiplicare il *numeratore*, e il *denominatore* dell' una, e dell' altra frazione per i *denominatori*, uno ſcambievolmente dell' altra. Sul dato eſempio ſi multiplichi tanto il *numeratore*, che il *denominatore* della prima per il denominatore della ſeconda, dicendo 1 via 4 produce 4, che ſarà il nuovo numeratore della prima frazione, 2 via 4 fa 8 nuovo denominatore, ed ecco compoſta la prima frazione $\frac{4}{8}$: dipoi ſi multiplichi e il *numeratore*, e il *denominatore* della ſeconda frazione col *denominatore* della prima, dicendo: 3 via 2 6, che è il nuovo *numeratore* della ſeconda frazione: 2 via 4 8 nuovo *denominatore* comune alla prima, e a queſta ſeconda frazione $\frac{6}{8}$, ed ecco ottenuto di ridurre le date frazioni ad un medeſimo *denominatore* nel primo modo. Per l' altra equivalente regola ſi multiplichi il *numeratore* della prima frazione per il *denominatore* della ſeconda, e ſe ne produr-

durrà il primo nuovo *numeratore* ; di poi si multiplichi il *numeratore* della seconda per il *denominatore* della prima, e ne risulterà il secondo nuovo *numeratore* finalmente si moltiplichino fra di loro i due *denominatori*, e ne verrà un nuovo *denominatore* comune all' una, e all' altra frazione. Nel dato esempio :

1 via 4	4	2 via 3	6
2 via 4	8	2 via 4	8

Sebbene non sia cosa tanto utile, possono colla medesima facilità ridursi al medesimo *numeratore* le frazioni che hanno diverso sì il *numeratore*, come il *denominatore*. Abbiansi le due frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{5}$ si multiplichi il *denominatore* della prima, col *numeratore* della seconda e scrivasi il prodotto 12 primo nuovo *denominatore*. Indi si multiplichi il *denominatore* della seconda per il *numeratore* della prima, e scrivasi il risultato 10 secondo nuovo *denominatore*. Finalmente si multiplichino tra di loro i due *numeratori*, e scrivasi il prodotto 8 per comune *numeratore*: $\frac{8}{12}$ $\frac{8}{10}$ E così resta anche ottenuto il medesimo numeratore alle date frazioni. E quì può ora osservarsi, che tra le frazioni che hanno il medesimo *numeratore* , la maggiore è quella, della quale è minore il *denominatore*: Infatti è manifesto esser maggiore

re $\frac{1}{2}$ che $\frac{1}{4}$. Tra le frazioni poi, che hanno il medeſimo *denominatore*, la maggiore è ſempre quella, che ha maggiore il *numeratore*; così $\frac{3}{4}$ è maggiore di $\frac{1}{4}$.

Può qui anche utilmente oſſervarſi, che non varia il valore delle frazioni, ſe tanto il *Numeratore*, che il *Denominatore* venga moltiplicato, o diviſo per la medeſima quantità. In fatti tanto vale $\frac{1}{2}$ che $\frac{2}{4}$ o $\frac{3}{6}$ o $\frac{4}{8}$ eſſendo ogn' una di queſte frazioni la metà di un unità diverſamente diviſa: E di quì ſi vede, che poſſon' eſſervi un infinità di frazioni dell' iſteſſo valore ſebbene eſpreſſe con diverſità di termini: così *ex. gr.* $\frac{20}{60}$ $\frac{30}{90}$ $\frac{25}{75}$ $\frac{100}{300}$, che ſon tutte egualmente un terzo di unità, ne hanno mille, e mille altre in altri diverſi termini del lor medeſimo valore.

Può in qualche occorrenza averſi biſogno di ridurre una ſola data frazione ad un dato *numeratore*, o *denominatore*; per eſeguir ciò, ſarebbe neceſſaria la regola Aurea, ma per non ſupporre ciò, che non ſi è per anche trattato, ne daremo una regola independente da quella cioè: data la frazione, alla quale ſi vuole aſſe-

ſegnare un diverſo determinato *denominatore*, ſi multiplichi il *numeratore* di detta frazione per il nuovo *denominatore*, che le ſi vuol dare, ed il prodotto ſi divida per il *denominatore*, che avea la medeſima frazione; Quello, che riſulta da queſta diviſione ſarà un nuovo *numeratore*, che farà valere il nuovo voluto *denominatore*, ſenz' alterare il valore della frazione: *ex. gr.* ſi abbia la frazione $\frac{3}{4}$ e ſi voglia in eſſa il *denominatore* 20: ſi multiplichi il *numeratore* 3 per 20: ne riſulta 60, che ſi divide per 4 e ſi ha il *quoziente* 15, che ſarà il numeratore corriſpondente al voluto *denominatore* 20, onde la frazione conſervi il medeſimo valore, che avea divenuta $\frac{15}{20}$.

Per ottenere una maggior preciſione, ed eſattezza in qualche operazione Aritmetica ſi può talvolta aver biſogno di ridurre a frazione uno, o più interi numeri; Per eſeguir queſto biſogna determinare il *denominatore*, che ſi vuol dare alla frazione, che deve equivalere al dato numero intero: ſi deve queſto intero numero multiplicare per l' aſſegnato *denominatore*, e il prodotto ſarà il *numeratore* della frazione. Vogliaſi *ex. gr.* ridurre ad equivalente frazione il numero 5 ſi determini per *denominatore ex. gr.* 12 che multiplicato per 5 da 60 che

ſarà

ſarà il *numeratore* della ricercata frazione $\frac{60}{12}$ che è coſa manifeſta eſſere equivalente a detto numero 5 poichè diviſo il 60 per 12, ſe ne rileva in prodotto, o ſia diviſore il medeſimo 5, in fatti ſe $\frac{12}{12}$ ſono equivalenti aduna unità, cinque volte $\frac{12}{12}$ che fanno 60 equivarranno a 5 unità.

Se aveſſe in qualche caſo da ridurſi ad una ſola frazione un numero intero, ed una frazione unita al medeſimo, ſi multiplichi l' intero per il *denominatore* della frazione, ed al prodotto ſi aggiunga il *numeratore* della medeſima frazione, tutta la ſomma coſtituirà il nuovo *numeratore* della deſiderata frazione. Così *ex. gr.* chi voleſſe ridurre ad una ſola frazione 3, e $\frac{2}{6}$ ſi dica 3 via 6 produce 18, a queſto ſi aggiunga 2 *numeratore* della frazione $\frac{2}{6}$ e ſi avrà 20 che è il nuovo *numeratore* della frazione cercata $\frac{20}{6}$ che è equivalente a 3, e $\frac{2}{6}$ ed è coſa, che non ha biſogno d' altra prova; Imperocchè eſ-

essendo quì l' unità divisa in sei parti eguali, tre unità saranno dunque distinte in 18 parti; a queste se ne aggiungono due della frazione annessa al 3, ne viene, che 20 seste parti d' unità siano di fatto 3 e $\frac{2}{6}$

Quello, che è poi sommamente da considerarsi nelle frazioni, verte sulla frequentemente troppo complicata espressione delle medesime *ex. gr.* in queste $\frac{65}{100}$ $\frac{275}{1000}$ $\frac{44}{72}$, le quali, o simili altre troppo composte frazioni bisogna per facilitar le operazioni ridurre alla possibile semplicità, che è la più intricata riduzione di frazioni, e che molte volte si rende se non d' impossibile, almeno di assai malagevole riuscimento.

Per un preventivo schiarimento della regola da prescriversi a questa operazione è da avvertirsi, che ogni numero, il quale può dividersi per altro minor numero, senza che vi rimanga alcun residuo, si dice *multiplo*, o *multiplice* di quel minor numero, che lo divide così esattamente. Così 8 è *multiplo* di 4, e di 2: Il 15 del 5 e del 3. E qualunque numero, senza eccezione è *multiplo* di 1: non è poi 8 multiplo di 7, nè di 6, nè di 5, nè di 3, perchè nè 7, nè 6, nè 5, nè 3 può mai far 8 o raddoppiandosi, o triplicandosi: neppure 15 è *multiplo* di 6, o di 4, o di 2,

non

non potendo formarsi dal prender replicatamente alcuno di questi numeri. La parte, o il numero, del quale altro maggior numero è *multiplo* si dice parte *aliquota* di esso maggior numero. Il numero, che non è *multiplo*, che dell' unità si dice numero *primo*; *ex. gr.* il 7, che non ha altro, che l' unità, come può vedersi, che replicata 7 volte possa comporlo. Esistono le Tavole presso varj autori di tutti i numeri che hanno per parte aliquota la sola unità. Basterà quì per un regolamento apportar quei del primo centenario, che sono i seguenti.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37
41, 43, 47, 53, 59 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Se pertanto sieno tali in una data frazione il *numeratore*, ed il *denominatore*, che possano esser divisi per un medesimo numero, potrà rendersi la frazione quanto più semplice si vuole, impiegando un *divisore*, che stia *meno volte*, che si può nei due numeri costituenti la frazione: *ex. gr.* debba semplicizzarsi questa frazione $\frac{21}{35}$ dividasi tanto il 21, che il 35 per 7, che stando tre volte nel primo, e 5 volte nel secondo, produrrà la nuova semplice frazione $\frac{3}{5}$.

Siccome i numeri pari son sempre divisibili per metà; le frazioni, che hanno tanto il numeratore, che il denominatore di numero pa-

ri poſſon ridurſi alle loro metà col medeſimo valore, come *ex. gr.* $\frac{4}{6}$ può ridurſi $\frac{2}{3}$ e le frazioni molto compoſte come $\frac{128}{432}$ poſſono anche ſucceſſivamente dimidiarſi da $\frac{128}{432}$ a $\frac{64}{216}$, e queſta a $\frac{32}{108}$ e queſta a $\frac{16}{54}$ e queſta finalmente a $\frac{8}{27}$, che ha ſempre l' iſteſſo valore della prima. E' però da notarſi, che una progreſſione così replicata di diminuzioni per metà non può ottenerſi in tutti i numeri pari, poichè *ex. gr.* dalla frazione $\frac{18}{50}$ dimidiandola, ſi viene ai $\frac{9}{25}$ che eſſendo caſſi non ſi procede più oltre a divider per metà.

Qualora finalmente incontriſi difficoltà nel ridurre le frazioni alla più ſemplice poſſibile eſpreſſione per le fin quì date regole, ſi ricorrerà alla ſeguente, praticabile per mezzo del comune maſſimo *diviſore* dei due termini della frazione data. Il metodo generale pertanto

tanto di trovar questo divisore comune è il seguente.

Il numero maggiore si divida per il minore, e se la divisione si potrà fare senza che vi rimanga alcun residuo, il medesimo minor numero, per il quale si è fatta la divisione sarà il *divisore*, che si ricerca: ma se poi vi sarà qualche residuo, per esso si dovrà dividere il numero minore, che se resterà esaurito, il residuo suddetto per il quale si è fatta questa seconda divisione, sarà il ricercato *divisore*: Che se anche dopo questa divisione si troverà altro residuo, si divida questo per il residuo sopraddetto; E per regola certa quel residuo sarà poi finalmente il massimo *divisore*, per il quale si potrà dividere esattamente il precedente residuo,

Sia per esempio da ridursi a' più semplici termini, che sia possibile, la frazione $\frac{30}{170}$ se ne cerchi il massimo comun *divisore*, dividendo, come si è detto doversi fare, il *denominatore* per il *numeratore*. Cinque volte stà 30 in 170, ma avanza il residuo 20; per il quale diviso 30, resta un secondo residuo di 10, per eso dividasi il primo residuo 20, e ne viene il *quoziente* 2, senz' alcun residuc: Ed ecco secondo la data regola, scoperto il comune massimo *divisore* de' due termini 30, e 170, che è 10, come quello che divide l' antecedente residuo esattamente senz' alcun

a-

avanzo. Per questo trovato *divisore* dividasi ora 30 *numeratore* della frazione data a semplicizzarsi, e nel *quoziente* 3 ne verrà il nuovo *numeratore* della cercata più semplice frazione, indi per l' istesso 3 diviso il *denominatore* 170., si avrà il *quoziente* 17 nuovo *denominatore*, di questa nuova frazione $\frac{3}{17}$ che più semplicemente che sia possibile in questo caso, esprime l'istesso dalla più composta frazione $\frac{30}{170}$.

DELL' ADDIZIONE DELLE FRAZIONI

LEZIONE VII. Art. I.

QUando si hanno più frazioni, che convenga aver tutte raccolte in una sola somma, si procede all' operazione nel modo seguente. Se le date frazioni, (sian quante si vogliono,) non abbiano l' istesso comune *denominatore*, si riducano ad averlo per la regola già assegnata. Si raccolgano in una sola somma tutti i *numeratori* questa somma costituirà il nuovo *numeratore*, che unito al comune *denominatore*, darà la total somma di tutte quante saranno state proposte frazioni. Siano le date frazioni

zioni $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{7}$ si riducano al medesimo *denominatore*, e saranno equivalentemente $\frac{21}{28}$ $\frac{20}{28}$ si riducano a una sola somma i due numeratori, e sarà 41, al qual numero aggiungasi sotto il comune *denominatore* 28, e si avrà nella sola frazione $\frac{41}{28}$ l' equivalente alle due date $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{7}$
Si debbano in oltre unire in una somma le tre frazioni $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{7}$. Riducansi all' istesso comune *denominatore*, rendendole $\frac{4}{6}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{3}{6}$. Se ne sommino i *numeratori*, che daranno 12, si aggiunga a questo prodotto il comune *denominatore* 6 e si avrà la frazione $\frac{12}{6}$ equivalente alle tre date, o sia a due unità.

Se alle frazioni vadano unite anche delle intere unità, e se ne debba raccorre per Addizione una somma contenente e l' une, e le altre, si raccolgano gl' interi in una sola somma, ed a questa si unisca la somma delle frazioni: Per esempio, se si abbiano, 4 e $\frac{1}{2}$, e

2 e $\frac{1}{3}$ si riducano per la data regola le due frazioni al medesimo *denominatore*, rendendole $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$, e si sommino insieme i due interi, che faranno 6, e quindi i due nuovi *numeratori* delle frazioni, che faranno 5, e se ne produrrà la somma di 6, e $\frac{5}{6}$. Se si avrà 3 e $\frac{4}{5}$ e 7, e $\frac{3}{4}$ se ne avrà la somma di 10, e $\frac{31}{20}$ ovvero l' equivalente 11 e $\frac{11}{20}$ fatta che siasi la medesima operazione.

DELLA SOTTRAZIONE DELLE FRAZIONI

ARTICOLO 2.

DI due date frazioni, la minore delle quali si deve sottrarre dalla maggiore, il *denominatore*, se non lo è, deve per la prescritta regola rendersi comune all' una, e all' altra, indi trovata la differenza tra i due *numeratori*, si prenda questa per il nuovo *numeratore* della

 fra-

frazione residuale, o prodotto della sottrazione della minore delle due date frazioni.

Siano *ex. gr.* le due frazioni $\frac{7}{10}$ e $\frac{4}{16}$ riducansi al medesimo *denominatore*, e avremo le equivalenti $\frac{112}{160}$ e $\frac{40}{160}$ sottraggasi il *numeratore* 40, dall' altro maggior *numeratore* 112, e si avrà la differenza, o eccesso del maggiore sopra il minore 72. Questo è il nuovo *numeratore*, al quale sottoposto il comune *denominatore* 160, si avrà nella frazione $\frac{72}{160}$ il prodotto della sottrazione.

Che se alle date frazioni fossero prefissi dei numeri interi, si devon questi sottrarre separatamente, ed al residuo, o risultato della sottrazione devesi poi soggiungere la differenza delle frazioni, o sia il risultato della loro sottrazione. Così se da 15, e $\frac{3}{4}$ debbano sottrarsi 7, e $\frac{1}{4}$ avremo il residuo 8, e $\frac{2}{4}$ vale a dire 8, e $\frac{1}{2}$.

Può avvenir poi, che delle frazioni, che han-

hanno prefiſſo i numeri interi ſia maggiore quella, che è anneſſa al numero intero minore, e che in conſeguenza il maggior numero intero, dal quale ſi ha da ſottrarre il minore abbia unita la minor frazione; nel qual caſo ſi deve prima di tutto togliere dal numero maggiore intero una unità, e ridurla a frazione coll' iſteſſo *denominatore* delle due date frazioni, e unirla in una ſomma colla minor frazione anneſſa a detto maggior numero intero. Si abbia *ex. gr.* da ſottrarre 7 e $\frac{3}{4}$ da 18 e $\frac{1}{4}$ tolto 1 a 18, e ridotto a frazione col medeſimo *denominatore* 4 cioè a $\frac{4}{4}$, avremo 17 e $\frac{1}{4}$ più $\frac{4}{4}$ cioè 17 e $\frac{5}{4}$ dalla qual quantità ſi potrà ſenza difficoltà ſottrarre, e 7 $\frac{3}{4}$ ed avere il preciſo reſiduo, o differenza delle due quantità 10 e $\frac{2}{4}$ o ſia $\frac{1}{2}$.

Così per poter ſottrarre la frazione $\frac{}{3}$ dall' intero numero 4 biſogna ridurre queſto intero numero a 3 e $\frac{3}{3}$ e ſi avrà il reſiduo 3 e

$\frac{1}{3}$, e così d' ogn' altro ſimil caſo in qualunque numero, e frazione.

DELLA MOLTIPLICAZIONE DELLE FRAZIONI

ART. 3.

Queſta terza Operazione di moltiplicar le frazioni ſi eſeguiſce con ſomma ſemplicità multiplicando il *numeratore* di una frazione col *numeratore* dell' altra; e così ſi avrà nel prodotto un nuovo *numeratore*. Similmente ſi avrà il nuovo *denominatore*, multiplicando i *denominatori* l' uno per l' altro delle due date frazioni; E tal nuova frazione coſtituirà il prodotto di queſta multiplicazione.

Sian date per eſempio a multiplicare le due frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$, dicaſi 2 via 3 fa 6: che farà il nuovo *numeratore*: 4 via 5 fa 20, che è il nuovo *denominatore* della nuova frazione $\frac{6}{20}$ che è il prodotto della multiplicazione, aſſai minore delle due frazioni date a multiplicare, anzi di minor valore d' una ſola di eſſe, che è ciò, che potrebbe cagionar maraviglia a chi non faceſſe tutte le opportune rifleſſioni ſul ca-

carattere delle frazioni , le quali , come può osservarsi in questo addotto esempio, fanno nella multiplicazione un effetto contrario a quello de' numeri interi , che multiplicandoli crescono , e le frazioni calano , o perdono di valore : se ne veda brevemente la ragione .

Bisogna primieramente ridursi qui a memoria , che il multiplicare un numero per un altro , vuol dire prender tante volte il numero , che è multiplicato , quante volte si contiene l' unità nel multiplicatore . Ora parlando delle frazioni , dovrà prendersi tante volte la frazione multiplicata , quante volte si conterrà l' unità in quella , che multiplica ; ma trattandosi di vera frazione , non può contenere neppure un' intera unità ; dunque non potrà neppur essere , che la frazione multiplicata possa prendersi neppure un intera volta : *exg r.* siano da multiplicarsi queste due frazioni $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ la prima , per cui si dee multiplicar la seconda contiene una mezza unità : Onde $\frac{1}{2}$ via $\frac{2}{3}$ è l' istesso che dire : *una mezza volta* , o *la metà di una volta* $\frac{2}{3}$. Ora dicendo *una intera volta* $\frac{2}{3}$ produrrà i medesimi $\frac{2}{3}$ come *una volta* 3 pre-

produce 3. Dovendo poi dir nel caso nostro, non *un intera volta*, ma *la metà sol di una volta* $\frac{2}{3}$ non produrranno che $\frac{1}{3}$. Così $\frac{2}{8}$ via $\frac{3}{4}$ cioè *presi per due ottave parti di un unità* i $\frac{3}{4}$ daranno il prodotto di $\frac{6}{32}$ cioè di *sole sei trentaduesime parti d' unità*.

Se si avesse a multiplicare per un numero intero una frazione, come 3 per $\frac{2}{7}$ allora sì, che questa, e qualunque altra frazione multiplicata per qualunque numero intero crescerebbe; dovendosi dire *tre volte* $\frac{2}{7}$ che produrrà $\frac{6}{7}$ così 5 via $\frac{3}{4}$ produrrà $\frac{15}{4}$ vale a dire tre unità, e $\frac{3}{4}$.

Al contrario multiplicato il numero intero per la frazione, scemerebbe a misura che la frazione contenesse minor numero di parti d' unità. Per esempio: si moltiplichi 9 per $\frac{2}{3}$:

ſi dovrà dire : $\frac{2}{3}$ via 9 , cioè , *due terze parti d' una volta* 9 produce 6 : $\frac{1}{2}$ cioè *una metà di una volta* 6 produce 3 . $\frac{1}{4}$ via 11 cioè *un quarto di una volta* 11 produce 2 , e $\frac{3}{4}$.

DELLA DIVISIONE
DELLE FRAZIONI
ART. 4.

DAte due frazioni , una delle quali deve divider l'altra *ex. gr.* $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$; quella che deve dividere, cioè $\frac{1}{2}$ deve roveſciarſi in modo, che il *numeratore* prenda il poſto del *denominatore*, e viceverſa cosi $\frac{2}{1}$. Per eſsa così inverſa ſi moltiplichi l' altra frazione $\frac{3}{4}$ dicendo $\frac{2 \text{ via } 3 \text{ fa } 6}{1 \text{ via } 4 \text{ fa } 4}$, e queſta nuova prodotta

frazione $\frac{6}{4}$ è il risultato della divisione.

Bisogna qui render ragione perchè dividendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ il *quoziente* debba essere $\frac{6}{4}$ vale a dire 1, e $\frac{1}{2}$. Resterà di ciò persuaso chi si rammenta, che il *quoziente* deve contenersi tante volte nel *dividendo*, quante volte si contiene l' unità nel *divisore*. Ma nel *divisore* del caso nostro non si contiene neppure un intera unità, ma solo una metà della medesima, dunque anche nel *dividendo* si deve sol contenere metà del *quoziente*: Ma quella quantità, la di cui sola metà è contenuta in un altra, è doppia di quella: Non è dunque maraviglia, che dalla divisione di $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{2}$ siasi avuto il prodotto, o *quoziente* $\frac{6}{4}$ doppio cioè del *dividendo* $\frac{3}{4}$.

Anzi ella è cosa manifestissima da quanti esempj dar si vogliano, che il *quoziente* multiplicato per il *divisore* produce sempre il *dividendo*. Così nel sopra dilucidato caso

$$\frac{1 \text{ via } 6 \text{ fa } 6}{2 \text{ via } 4 \text{ fa } 8}\text{, cioè la frazione } \frac{6}{8} \text{ equivalen-}$$

te al dividendo $\frac{3}{4}$, come è manifesto.

DELL' ESTRAZIONE DELLE RADICI

SÌ QUADRATE CHE CUBICHE

LEZIONE VIII.

NElle fin quì proposte, e dimostrate Operazioni Aritmetiche e su i numeri interi, e sulle Frazioni, può dirsi, che si abbiano, da chi vi avrà acquistato una sufficiente pratica, ogni essenzial Capitale per saper procedere ai meno comuni, e più reconditi computi, allo scioglimento ingegnoso di Problemi, e Quesiti complicati, e connessi colla scienza delle Proporzioni, e Progressioni Aritmetiche, ed esigenti una perfetta cognizione dei caratteri tutti, proprietà, e reciproche relazioni, combinazioni, e potenze dei numeri: Alle quali notizie acciò non manchi una per avventura delle più importanti: Si vuol quì colla possibil brevità, dar le necessarie nozioni delle Radici, Quadrate, Cube, e d' ogn 'altro nome, che sia, e communicar le regole per estrarle.

Quel solo numero dee dirsi *Radice* d' un dato maggior numero, che ha proprietà tale, che

che multiplicato, o una sol volta, o più volte successivamente in se stesso, produce il dato maggior numero. Così *ex. gr.* 3 è *Radice* di 9 perchè multiplicato per se stesso produce 9, similmente 4 è *Radice* di 16 per l' istessa ragione. Ho detto che può un numero dato esser *Radice* d' un' altro dato numero, ancorchè per produrlo debba multiplicarsi non una, ma più volte successivamente per se stesso. Per ben intendere esser ciò vero, è da sapersi che queste *Radici* de' numeri si distinguono in più classi R 1. (*Radice prima*), che dicesi volgarmente *Quadra*, o *Quadrata*. R 2. che dicesi *Cuba*, o *Cubica*. R 3. che dicesi *Quadrato-quadrata*. R 4., che dicesi *Quadrato-Cubica*. R 5. che passa per *Cubico-Cuba*. Ora se il numero multiplicato solo una volta in se stesso produce il dato maggior numero, è Radice 1. del medesimo, se per produrre il dato numero deve multiplicarsi due volte successivamente per se stesso, *ex. gr.* 4 che per produrre 64 bisogna, che due volte appunto si multiplichi per se stesso successivamente, dicendo 4 via 4 fa 16: indi 4 via 16: 64: in questo caso 4 sarà *Radice* 2 o *Cubica* di 64, e così se il numero, che è *Radice* di un' altro dato numero bisogna che sia per se stesso multiplicato successivamente tre, quattro, cinque volte, sarà *Radice* 3 4, o 5.

E però quì da notarsi, che sebbene qualunque numero possa essere o prima, o seconda

da, o altra *Radice* di qualſivoglia altro nome di qualche altro numero ; Non ogni numero per altro può aver *Radice* d' ogni nome , o claſſe : Così tra tutti i numeri per eſempio , minori di dieci , tre ſolamente hanno la prima *Radice* , 1 che ha per prima *Radice* uno : 4, che ha per prima *Radice* due , e 9 che ha tre e il ſolo 8 ha la R 2 , che è 2 perocchè 2 via 2 dà 4 ; e 2 via 4 dà 8 . La piccola Tavola , che quì ſi eſibiſce delle *Radici* ſemplici, e che eſprimer ſi poſſono con una ſola cifra Aritmetica darà a vedere più chiaramente di quali numeri potranno eſſe Radici eſſere R 1. R 2. R 3. R 4. R 5.

Cub. Cub.	1	64	729	4096	15625
Quad. Cub.	1	32	243	1024	3125
Quad. Quadr.	1	16	81	256	625
Cubi	1	8	27	64	125
Quadrati	1	4	9	16	25
Radici	1	2	3	4	5

Cub. Cub.	46656,	117649,	262144,	531441
Quad. Cub.	7776	16807	32768	59049
Quadr.Quad.	1296	2401	4096	6561
Cubi	216	343	512	729
Quadrati	36	49	64	81
Radici	6	7	8	9

E' bene osservar qui, che il passare un numero dallo stato *Radicale*, multiplicato per se stesso, al *Quadrato*, e più volte in se stesso successivamente multiplicato, al *Cubo*, al *Quadrato - Quadrato* &c. vuol dire, passar quel dato numero da una *Potenza* minore, ad una maggiore. Cosicchè i numeri *Radicali* dalla prima minor' *Potenza* di tutte, passano multiplicati in se stessi alla seconda *Potenza*, che è il Quadrato, e più volte successivamente multiplicati passano a sempre maggior Potenza, cioè al *Cubo*, al *Quadrato - Quadrato &c.*

E' anche osservabile, che il numero semplice, come apparisce dalla sopra descritta Tavola, non può aver il *Quadrato* composto di più di due numeri; dappoichè il 10 che è il minore tra i composti, ha per *Quadrato* 100, che è il minimo numero tra i composti di tre cifre. E' anche egualmente manifesto, che non vi può esser numero tra i composti di due cifre, che possa avere un *Quadrato* composto di più che di quattro numeri, o cifre: giacchè 100, il quale è il minimo, come si è detto, tra i composti di tre cifre, ha per *Quadrato* 10000, numero, di cui non vi ha il minore tra i composti di cinque cifre. Tengasi in somma per regola generale, non esservi *Quadrato*, che possa aver cifre più che il doppio di quelle della sua Radice.

Premesse queste osservazioni, e data così un idea sì de' numeri radicali, come delle successive loro sempre maggiori *potenze*, alle quali

lì colle prescritte regole possono essere inalzati: è tempo di passare alla cognizione del modo, per cui facendo quasi descendere i numeri dalle loro proprie *potenze*, si possano ricondurre alla prima loro *radice*. Non si potrebbe con più chiarezza dimostrar ciò, che per via della pratica di attuale operazione.

Si debba per esempio trovare la *radice quadrata* del numero 1764, che essendo composto di quattro cifre; per l' osservazione fatta, la di lui radice deve aver due sole cifre. Bisogna distinguere in due membri detto numero con una virgola, o punto di mezzo, che lasci a ciascun membro due cifre, in questa maniera 17, 64. Si cerchi la *radice quadrata* nel primo membro a sinistra, che sebbene abbia il valore di 1700, si consideri pure per *diciassette*, rammentandosi le osservazioni fatte sul valor locale de' numeri in più luoghi, ma principalmente nella *divisione*, colla quale operazione potrà quì osservarsi aver molta analogia questa dell' estrazione delle *Rad.* Osservisi adunque che 17 non essendo numero quadrato, non può avere una precisa *radice*, onde tanto in questo, quanto in ogni altro caso d' incontrarsi in numeri non quadrati, si deve prendere la *radice* del più prossimo numero quadrato minore del dato numero non quadrato. Dunque prendasi nel caso

ſo noſtro la radice dell' antecedente più vicino numero quadrato 16, che è 4; Scrivaſi queſto numero da parte per primo della radice, che ſi troverà avere il dato numero 1764, che eſſendo compoſto di 4 cifre, avrà, come abbiamo oſſervato, la *radice* compoſta di due, e dovendo

17,64 16	42
1,64 82	
164	
0	

eſſer la prima il 4, è manifeſto intanto che che queſto 4 ſpiega valore di 40. Scrivaſi pertanto il quadrato 16, di cui è biſognato valerſi, ſotto il primo membro del dato numero, e ſottratto eſſo numero quadrato dal 17, o ſia primo membro ſuddetto, ſcrivaſi il reſiduo 1 ſotto la linea in riga dei centenarj, cioè ſotto il 6 di detto numero quadrato 16. A queſta unità (*che ha valore di cento*,) ſi aggiungano a deſtra i due numeri componenti il ſecondo membro del dato numero, cioè 64. Prendaſi il doppio della *radice* 4 già trovata, val a dire, 8, e ſcrivaſi ſotto il primo numero dell' aggiunto ſecondo membro, cioè ſotto il 6. Per queſto numero 8 dividaſi il 16, ed il *quotiente* 2 aggiungaſi alla deſtra parte sì del 4, primo numero della trovata *radice*, come dell' iſteſſo *diviſore* 8, che elevato così al valore di 82, ſi multiplichi per il medeſimo 2 ſoggiunto al primo numero della *radice*, e ſcrivaſi il prodotto di tal multiplicazione, che ſarà 164, il quale eguagliando, ſenz' alcun reſiduo il ſuperior nu-

numero 164 composto e del centenario residuale del 17 (*cioè* 1700) sopra il quadrato 16 (*cioè* 160), e del secondo membro 64 , non dà luogo ad alcuna sottrazione, e però la trovata radice 42 sarà la vera , e precisa del numero dato 1764 , il quale in conseguenza è numero quadrato. Se vuol vedersi incontrastabilmente, se l' operazione abbia prodotto la verità, si multiplichi per se stessa la trovata *radice* 42, ed avutone in total prodotto 1764 , resterà la fatta operazione pienamente giustificata. Potrebbe solo desiderarsi la ragione per cui, trovato, che si è il primo numero radicale, per trovar gli altri, (giacchè possono anch' esser più di due , se il proposto numero quadrato ha più di 4 cifre) si debba prender *doppio* il suddetto primo numero della radice per servirsene di divisore del seguente membro, ed essendo nel numero dato per trovarne la radice anche il terzo membro , si debba prender *doppia* la somma de' due primi numeri radicali per altro divisore del medesimo terzo membro, e residui se vi sono dell' antecedente ?

E' prima di tutto da avvertirsi , che dovendo considerarsi il numero proposto a trovarsene la radice come un tal qual prodotto di multiplicazione, del quale si cercano gl' ignoti produttori, trovato che siasi il primo , o per dir più giusto, una parte di primo , corrispondente alla prima parte del proposto numero, bisogna per essa dividere il residuale del medesimo numero proposto. Ed acciò nel caso nostro

sia

ſia giuſto il quoziente di eſſa diviſione, la detta prima parte di trovata radice deve prenderſi doppia, acciocchè il quoziente della diviſione rieſca della metà del valore, di cui riuſcirebbe a prenderla ſemplicemente, eſſendo ſempre vero, che quanto è minore il numero *diviſore*, tanto maggiore ne riſulta il *quoziente*: E ſe ripenſaſi, che la radice contien ſempre una ſola metà delle cifre rapporto al ſuo *quadrato*, il quale ſe ne ha quattro, la ſua radice ne può ſolo aver due; ſi riconoſcerà neceſſario il ricorrere all' ingegnoſo raddoppiamento de' primi trovati quozienti radicali, per ottenere nella diviſione per eſſi della porzione rimanente del propoſto numero quadrato, una ſola metà di valore nel *quoziente*, che ne riſulta, dovendo queſto computarſi per compire il numero radicale. Senza di che, avendo il quadrato ragion dupla ai ſuoi lati, che ne ſon la *radice*, per determinar queſta nella ſua proporzione, biſogna, col duplicare i numeri radicali procurare un diviſore, che faccia diſcendere il numero quadrato dalla ſua potenza, alla preciſa ſemplicità radicale ſua propria.

Sarà neceſſario ora produrre un altro eſempio, che porti una *radice* di più di due cifre. Vogliaſi dunque trovar *la radice quadrata* del numero 389489 ſi divida al ſolito in membri contenenti due cifre per ciaſcheduno cominciando dalla deſtra parte, cioè dalle unità ſemplici. E quì è da oſſervarſi la ragione per cui deveſi far queſta diſtinzione di membri con inco-

cominciar dalla parte deſtra, ed è, che potendo accadere che il numero propoſto abbia le cifre in caſſo, il membro d' una ſola cifra cada dalla parte ſiniſtra nei centenarj, o millenarj che ſiano. Si cerchi intanto nel propoſto eſempio la radice del quadrato del primo membro 38, che ſiccome non è numero quadrato, prendaſi il più vicino per indietro, che è 36, del quale è *radice* 6, che ſcrivaſi a parte; indi ſi ſottragga il medeſimo quadrato 36, da 38, e ſcrivaſi ſotto la linea il reſiduo 2 in dirittura delle diecine di migliaja; al quale ſi aggiunga a deſtra il ſecondo membro 94, e ſcrivaſi ſotto 12, cioè il *doppio* della trovata radice 6, e ſcrivaſi in modo, che il 2 reſti ſotto il 9 del ſecondo ſopradetto membro. Dividaſi 29 (*che è il reſiduo del primo membro, e il primo numero del ſecondo*) per 12 (*che è la prima trovata radice raddoppiata*) e ſcrivaſi il quoziente 2 alla parte deſtra tanto del diviſore 12, che della trovata radice 6. Si multiplichi 122 per 2 (*cioè per il trovato ſecondo numero della radice*) e il prodotto 244 ſi ſottragga dal 294, (*che era il ſecondo membro unito al 2 reſiduo del primo*), ſi avrà altro reſiduo 50, da ſcriverſi ſotto la li-

```
38, 94, 89 } 624
36
----------
294
122
244
----------
50,89
124,4
4976
----------
113
```

linea in dirittura dei millenarj, e centenari rispetto al proposto numero 389489: dalla parte destra di questo residuo 50 si aggiunga il terzo membro 89. Prendasi il doppio della somma de' due numeri radicali trovati finora 62, de' quali la doppia somma sarà 124. e scrivasi questa sotto il residuo 50, e l' ultimo membro aggiuntovi, in modo, che l' ultima di lei cifra 4 sia sotto l' 8 primo numero dell' ultimo aggiunto membro. Dividasi per detta somma di radicali 124 il residuo 50 con il primo numero dell' ultimo suddetto membro, che li segue, presi insieme in supposto valore di 508, ed il *quoziente* 4, che ne risulta, si aggiunga alla parte destra sì dei due trovati radicali, come del medesimo divisore 124: e per esso numero 4 multiplicato tutto il numero 1244, ne verrà il prodotto 4976, che sottratto dal 5089 (*che è il terzo membro unito al residuo del secondo*), resta in ultimo residuo 113, al quale non essendo da aggiungere altro membro del proposto numero, resterà fissata ad esso numero 389489 la radice 624, che non è già la verissima radice di detto numero, non essendo *quadrato*, ma la più approssimante alla vera. E chi poi levasse al proposto numero l' ultimo residuo 113, resterebbe perfettamente *quadrato*, e la trovata radice ne sarebbe la vera.

Quando s' abbia da estrarre la seconda radice, o sia la *Cubica*, non vi abbisogna operazione molto dissimile da quella, che si è veduto dover farsi per estrarre la radice quadrata.

Se

Se non che quei primi numeri, che successivamente si rilevano dai primi membri del proposto numero quadrato, e che son parte della ricercata *radice*, e de' quali preso il *doppio*, si fanno servire da divisori del susseguente membro; nel voler poi estrarre la *radice cubica*, prima di valersene per divisori, bisogna inalzarli alla dignità, o potenza di quadrato: e ne è manifesta in fatti la ragione, perchè per discendere alla *radice cuba*, bisogna pur passare per la *quadrata*: Di più, ridotto, che è detto numero radicale a *quadrato* non solo si raddoppia, come nell' operazione dell' estrazione della prima *radice*, ma si multiplica per tre, essenche il *cubo* stà in ragion tripla dei lati, laddove il *quadrato* ne sta in ragion dupla, e ciò in corrispondenza ancora dei membri del numero, di cui si dee cercar la *radice cuba*, i quali membri non son distinti per l' estrazione di questa seconda radice ciascuno in due cifre, ma in tre, eccettuato il primo dalla parte sinistra, che atteso il maggiore, e minor numero di cifre, che porta seco il proposto numero, può averne, quando una, quando due, e talora anche tre come gli altri membri susseguenti. Ed è anche osservabile, che volendosi estrarre la radice terza, o sia *quadrato-quadrata*, i membri del numero proposto devono essere di quattro cifre: così per l' estrazione della radice quarta sarebbero di cinque &c. Ed è da tenersi per regola, che in ogni estrazion di radice di qualunque nome, o grado, in quanti

 mem-

membri sarà da dividersi il numero, dal quale si deve estrar la radice, tanti saranno i numeri, o cifre, che conterrà la radice medesima.

Or sia per esempio da estrarre la *radice cubica* dal numero 13824: diviso che sia come si è detto, ne' suoi membri, che saranno due, si osservi se il numero 13 componente il primo membro è numero *cubo*, e trovato che non è, si prenda il più vicino *cubo* per indietro, che è 8.

13,824	24
8	
58	

La *radice cubica* di 8 è 2, poichè inalzato a *quadrato* 2, vien 4, e 4 multiplicato per 2 dà 8 che è il *cubo* di 2, come può vedersi nella tavola sopra descritta, la quale è ben consultare su i principj per aver pronta la proprietà d'ogni radice, e d'ogni numero o *quadrato* o *cubico*. Si scriva il detto numero *cubo* 8 sotto il secondo numero del primo membro, e la *radice* 2 a parte. Bisogna sottrarre il *cubo* 8 dal 13 primo membro del proposto numero; la differenza, o residuo è 5, che scrivesi sotto la linea in riga de' millenarj, cioè in dirittura del medesimo secondo numero del primo membro. Scrivasi dipoi il primo numero del secondo membro, che è 8 alla parte destra del suddetto 5, residuale del primo membro coll' apparente valore di 58, avendolo realmente di 5800, indi si quadri il primo trovato numero radicale 2 rendendolo 4, si multiplichi esso 4 per 3, e sia 12, si divida per 12 il 58 suddetto (*che giova supporre di tal valore*) ed il *quoziente* 4, che ne

ne risulta, scrivasi alla destra del 2 primo numero radicale, che unito a questo secondo, dice 24 *radice cuba* esatta del proposto numero 13824. Si può essere osservato, che in luogo di unire al 5 residuo del primo membro tutti i numeri del secondo membro per estrarne la totale radice, si è solamente adoprato il primo numero di detto secondo membro: e ciò si è fatto per servire alla maggior semplicità, e facilità dell' operazione, venendo l' istesso prodotto di radice anche impiegando, e computando tutti i numeri del ridetto secondo membro, ma con maggiore imbarazzo.

Resta ora per compimento di questa lezione da prescriversi la regola per estrarre qualunque *radice* o *quadrata* o *cubica*, o di qualunque susseguente grado, dalle frazioni. Per ottener ciò si riduca la data frazione ai più semplici termini per la regola data alla VII. Lezione. Dipoi si veda qual radice abbia il numeratore della data frazione, come se fosse un numero intero, e la radice che ha, sarà il nuovo numeratore che concorrerà a formar la nuova frazione, esprimente la radice, che si vuole della frazione proposta. L' istesso esame si faccia sul denominatore, e si avrà anche il nuovo denominatore della nuova frazione radicale.

Per esempio, vogliasi la *radice prima*, o sia *quadrata* della frazione $\frac{49}{100}$ essendo 7 la radice prima di 49, e 10 quella di 100; la radice

dice prima adunque della data frazione sarà $\frac{7}{10}$. Se inseguito si cerchi la *radice cuba*, o *seconda* della frazione *ex. gr.* $\frac{27}{64}$ siccome la radice seconda, o cuba di 27 è 3: e quella di 64. è 4: le ricercata radice della proposta frazione sarà $\frac{3}{4}$. In terzo luogo per ottenere la *radice terza*, o sia *quadrato-quadrata* della frazione $\frac{16}{81}$ veduto, che la radice terza di 16 è 2: e la medesima radice di 81 è 3: Sarà certo che la ricercata radice terza della proposta frazione è $\frac{2}{3}$.

Prima di passare alla Lezione IX. piacemi quì di far osservare un effetto mirabile della successiva multiplicazione di un numero per se medesimo, a trovare tutte le possibili permutazioni in una pluralità di cose, sian lettere, sian numeri, sian persone, o altro. Vogliasi *ex. gr.* vedere, quante volte successivamente si possano scrivere con ordine diverso le quattro lettere, che esprimono la voce *cubo*. Quante lettere sono, tanti numeri, si scrivano, cominciando dall' unità, cioè 1,2,3,4. Si multipli-

chino

chino essi uno per l' altro successivamente così. 1 via 2 fa 2: 2 via 3 fa 6: 6 via 4 fa 24: Ora ella è cosa certa che la voce *cubo*, (o qualunque altra di 4 lettere, purchè siano come in questa tutte diverse l' una dall' altra), si può scriver 24 volte con ordine di lettere sempre diverso.

Che se poi si tratta di una voce, in cui una medesima lettera sia replicata, come in *carta* ove si contien due volte la lettera *a*, si devono scriver già i numeri, come sopra corrispondenti al numero delle lettere, che essendo 5 nella voce *carta*, cinque saranno i numeri da multiplicarsi successivamente cioè 1,2,3,4,5, dicendo 1 via 2, 2: 2 via 3 fa 6: 6 via 4 fa 24, e 5 via 24. fa 120. Ma siccome nella data voce vi è due volte *a*; bisogna veder questa doppia lettera quante volte si può far variare nell' ordine; e trovato, che due sole son le variazioni, che può avere, cioè una volta ponendo la prima dopo la seconda, e l' altra volta la seconda dopo la prima; si prenda questo quoziente 2, e si divida per esso il sopradetto prodotto 120, e la sua metà 60 indica quante volte si può scrivere la voce *carta* colle sue lettere sempre in un ordine diverso. Così ogni voce di 5 lettere che ne abbia una replicata, come, *penna*, *libri &c.* potrà scriversi in combinazione sempre variata per 60 volte.

E se fossero ad una mensa cinque persone, perchè tutte diverse, potranno permutarsi sempre diversamente ordinate 120 volte, poichè, come

come si è veduto cinque numeri, cominciando dall' unità, multiplicati successivamente per se medesimi producono 120.

Se con questa regola si volessero ricercare tutte le permutazioni, delle quali son suscettibili tutte insieme le lettere dell' alfabeto, si troverebbe il numero 620448401733239439360000 del qual numero, osserva un gran matematico, è minore assai il numero di tutte le voci, che si contengono nei fin quì scritti libri di tutto il mondo.

DELLE PROPORZIONI ARITMETICHE

LEZIONE IX.

QUando due quantità del medesimo genere, quali sarebbero i *numeri*, si paragonano insieme per venire in cognizione, se siano eguali, o disuguali, quanto l' una sia maggior dell' altra, quante volte la maggiore contenga la minore, o qual altra relazione, o abitudine passi tra le medesime; Dicesi generalmente, trattandosi di numeri, instituirsi in tali comparazioni quella che dicesi *Ragione Aritmetica*, per la quale si può *ex. gr.* paragonare il 4 col 12 per iscoprire qual sia l' eccesso di 12 sopra 4, ovvero quante volte contengasi il 4 nel 12; il 7 nel 49 &c. I due termini, o numeri, che si mettono in paragone uno dicesi *antecedente*, l' al-

altro *conseguente*, ed ogni *ragione* è cosa manifesta, consistere nella quantità presa in esame, la quale esprime il modo, ed abitudine, che tiene l' antecedente col suo conseguente. Ed è da riflettersi, che non sogliono ordinariamente mettersi in paragone se non quantità, o numeri disuguali, o almeno che la loro eguaglianza non sia per anche nota. Che se si abbiano due numeri, dei quali la differenza, o il quoziente sia eguale al quoziente, o alla differenza di due altri numeri, sebben di valore diverso: la ragione degli uni, e degli altri è la medesima. Così essendo l' eccesso di 7 sopra 3 uguale all' eccesso di 9 sopra 5, sarà la ragione aritmetica di 7 a 5 la medesima che la ragione di 9 a 5. E quì è da notarsi, che quattro termini, che siano come questi nella medesima ragione, costituiscono la proporzione Aritmetica: dei 4 termini della quale il primo, e l' ultimo si dicono *estremi*, il secondo, e il terzo, *medii*. La somma degli *estremi* è notabile, esser sempre uguale alla somma de' *medii*: come per esempio nei quattro numeri proporzionali 7, 3 : : 9, 5, (de' quali, come di ogni altra serie di simil proporzione, è questa l' espressione: come stà 7 a 3 così stà 9 a 5: perocchè 4 è la differenza sì tra i primi due termini, come tra i due ultimi); In essi, io dico, la somma de' due estremi 7 e 5, e uguale alla somma de' due medii 3, e 9, essendo 12 tanto negli uni, quanto negli altri. Così dei proporzionali, 9 15 : 21, 27: si troverà 36 la somma degli estremi,

e

e 36, quella de' medii: così in 18, 27, 36, 45; sarà 63 tanto la somma degli uni, quanto quella degli altri, e così in ogni altra simile proporzione aritmetica.

E' poi osservabile, che spesso succede, che il *conseguente* della prima *ragione* serve ancora di *antecedente* alla seconda, consistendo allora la *proporzione* in tre sole quantità, o numeri: la proporzione dei quali per altro non cammina secondo l' egual differenza tra gli uni, e gli altri, come nella già osservata proporzione di 4 termini, ma in ragion dupla, tripla, quadrupla &c. tanto del primo rapporto al secondo, quanto di esso secondo rapporto al terzo; come sarebbe; 3, 6, 12: de' quali tre numeri si esprime la proporzione così: come sta 3 a 6, così stà il *medesimo* 6, a 12; cioè in ragione dupla; e dicesi questa proporzione Aritmetica *continua*: potendosi continuare per una serie di quanti numeri si vuole ripigliando successivamente ogni *conseguente* per *antecedente* dell' altro *conseguente*, che segue; per esempio istituendo questa proporzione in ragion tripla: come 2, a 6, così 6 a 18, così 18 a 54; così 54 a 162, così 162, a 486 &c.

E quì è bene avvertire, che ammettesi tal volta nel genere di proporzioni continue altra, che non cammina nè in ragion tripla, nè dupla, nè quadrupla, ma in ragione della differenza del primo sul secondo termine eguale alla differenza dell' istesso secondo sul terzo, come appunto la proporzione descritta in 4 termini:

ex.

ex. gr. stà 5 a 9 come 9 a 13: cioè in differenza di 4. In questa proporzione la somma de' due estremi e doppia del medio, come vedesi nell' addotto esempio, in cui la somma degli estremi è 18, e il medio è 9 metà di 18: Talmente che per formare questa proporzione di numeri anche composti di tre, di quattro o più cifre; dati gli estremi, nella metà della loro somma si trova il medio con tutta la facilità: *ex. gr.* Siano i due estremi 364, e 582: della loro somma 946 si prenda la metà cioè 473, e questo è il termine medio, e starà di fatto 364 a 473: come 473 a 582, vale a dire in egual differenza di 109. Questa specie per altro di continua proporzione, che può estendersi a quanti termini si vogliono nella sempre medesima differenza, si direbbe più propriamente *proporzionalità*, della quale nella seguente Lezione.

Facciasi ora qualche esercizio sulle divisate proporzioni, mostrando la verità di qualche teorema, o proposizione inducente i principali caratteri, e proprietà delle medesime. E prima di tutto si sciolgano i seguenti problemi relativi alla proporzione continua, la quale singolarmente riguardano anche le susseguenti proposizioni, o teoremi.

PROBLEMA I. *Dati due numeri trovare il terzo ad essi proporzionale*. Siano i due dati numeri 4, e 6; siccome prendendo la metà di 4, che è 2, e unendola a 4 fa 6: e similmente unendo la metà di 6, che è 3 al medesimo 6 fa 9 dico che 9 è appunto il terzo

nu-

numero proporzionale ricercato. Perocchè se è vero che diviso 6 in tre parti, 4 ne contien due diviso parimenti in tre parti il 9, egualmente due ne contiene il 6; è dunque manifesto, che ha 4 a 6 la medesima ragione, che ha l' istesso 6 a 9. E' bene osservabile, che se i due dati numeri fossero *primi* tra di se, non si potrebbe trovare il terzo proporzionale. Si è già spiegato alla Lezione V. cosa intendasi per numero *Primo*. Che se per esempio i due dati numeri fossero 4, e 7, siccome la metà di 4 unita a 4 non può comporre il 7, nè può dividersi il 7 per unirne la metà ad altro numero, si vede per esperienza esser vero che non si può trovare un terzo numero proporzionale a dati numeri che siano *Primi*.

PROBLEMA II. *Dati tre numeri trovare il quarto proporzionale a' medesimi*. Siano i dati tre numeri di continua Proporzione 8. 12. 18. Siccome stà 8 a 12, come 12 a 18, così starà al medesimo 18 anche il 27, ed in conseguenza sarà il 27 il quarto ricercato proporzionale. Imperciocchè unendo la metà d' 8 a 8, fa il secondo dato numero 12, al quale aggiungendo la propria metà, fa il terzo dato numero 18, e unendo a questo medesimo la sua propria metà fa 27: dunque 27 è realmente il quarto ricercato proporzionale. E se vogliasi fare la più palpabile, e sicura riprova, che questi quattro numeri siano proporzionali, si ricorra ad una regola generale per tal proporzione in quattro numeri. Si multiplicano gli

gli Estremi , e i Medii per se medesimi , tanto gli uni , che gli altri , e se i prodotti di tali multiplicazioni riescono eguali , vi è la ricercata proporzione . Nel caso presente si multiplichi dunque 27 per 8, che sono i due estremi , e ne vien la somma 216. indi si multiplichino i due medii , e come ne viene il medesimo prodotto 216 , bisogna concludere , che son proporzionali i quattro numeri , e che il 27 è il vero quarto proporzionale, che doveasi trovare .

La regola medesima , della quale abbiamo fatto quì , e si può sempre far riprova sulla verità della proporzione in quattro termini , vale ancora per la proporzione *Continua* in tre termini, osservando che il prodotto della multiplicazione degli estremi dev' essere uguale al prodotto del termine medio multiplicato per se stesso : Così in questa proporzione 3,6,12 , si dirà 3 *via* 12 fa 36 ; e 6 *via* 6 fa il medesimo 36.

PROBLEMA III. *Dati i due estremi*, *trovare il termine medio di continua proporzione* . Si multiplichino i due dati termini l' uno per l' altro , e si trovi poi la prima Radice del prodotto; e questa sarà il cercato termine medio . Siano *ex. gr.* i due estremi 4 , e 9 , il prodotto della loro multiplicazione è 36 : la Radice prima , o Quadrata di 36 è 6 , come è manifesto , dunque 6 è il medio proporzionale ; e di fatto stà 4 a 6, come 6 a 9, tanto contenendo 4 due terze parti di 6, quanto

6 due terze parti di 9 .

E' da notarſi , che ſe i due dati eſtremi foſſero Quadrati , multiplicati i loro lati (*che ſon le Radici*) l' uno per l' altro , il prodotto ſarebbe il medio proporzionale , *ex. gr.* ſiano i due eſtremi 9 , e 49 : Eſſi ſon Quadrati , e i loro lati , o Radici ſono 3 , e 7 che multiplicandoli fanno 21 . Ora 21 è il medio proporzionale , ſtando , come è manifeſto , 9 a 21 ; come 21 a 49 .

PROBLEMA IV. *Dati i due eſtremi , trovare i due medii proporzionali* . Siano i due termini eſtremi 2 , e 16 : Si ſcrivano queſti come ſe foſſero una frazione in modo , che il maggiore ſia il *numeratore* , e il minore il *denominatore* così $\frac{16}{2}$ ſi trovi per la regola data alla Lezione VIII. la radice ſeconda , o Cuba di queſta frazione , che è $\frac{2}{1}$ ſi multiplichi il minore eſtremo 2 per il numeratore di queſta trovata radice , e darà 4 che ſarà il minore de Medij proporzionali da trovarſi : di nuovo ſi multiplichi 4 per il medeſimo numeratore 2 e ſi avrà 8 che ſarà il maggiore dei ricercati medii proporzionali : e torna in fatti con eſſi la proporzione ; ſtando 2 a 4 , come 8 a 16.

Si oſſervi anche sù queſto Problema che ſe i due Eſtremi foſſero Cubi , trovate le loro radici ſeconde , o ſia Cube , che ſono i lati dei

dei medesimi Cubi, si multiplichino uno per l' altro successivamente, come si vedrà nel qui annesso esempio, e si avranno i due medij dai prodotti. Siano *ex. gr.* i due Estremi dati i due Cubi 8, e 64; i loro due lati o radici Cube sono 2, e 4. Si multiplichi 2 per 4 e fa 8, indi 2 per 8, e produce 16, che sarà il primo medio: Si multiplichi ora l' altra radice 4 per 8, e il prodotto 32 sarà il secondo medio proporzionale; stando difatto 8 a 16, come 32 a 64.

PROBLEMA V. *Dati due termini estremi trovare quanti medii termini proporzionali si vogliono.*

Siano i dati estremi 9, e 2187: ridotti come si è detto al Problema IV., a frazione, sarà questa $\frac{2187}{9}$; deve trovarsi la Radice quarta, cioè Quadrato-Cuba della medesima frazione, la quale è 3 non importando apporvi il *denominatore*, poichè del solo *numeratore* 3 si ha bisogno sì in questo, come anche nel passato Problema, come si è potuto osservare. Si multiplichi dunque successivamente per questa Radice 3, il minor numero dato ehe è 9, e si dica 3 *via* 9; 27, e questo 27 è il minore dei quattro ricercati medii proporzionali: indi si prosegua: 3 *via* 27 81, che è il secondo medio: dipoi 3 *via* 81: 243, terzo medio; Finalmente multiplicando per la quarta volta 3 per 243, si avrà il quarto maggior numero me-

medio proporzionale 729. E si vedrà esser verissimo, che 9, 27, 81, 243, 729, 2187, son continuamente proporzionali.

TEOREMA I. *Siano quanti numeri si vogliono Proporzionali, come starà uno degli antecedenti ad uno dei conseguenti, così staranno tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti.*

Siano i 6 numeri proporzionali 3:9:4:12: 7, 21: nei quali si vede, che come stà 3 a 9: così sta 4 a 12: così 7 a 21. Cominando sempre ogni antecedente al suo conseguente in ragion tripla, contenendo il 3 una terza parte di 9: il 4 una terza parte di 12: e il 7 una terza parte di 21, e in conseguenza contiene il 9 tre volte il 3: il 12 tre volte il 4: e il 21 tre volte il 7. Io dico dunque, che raccogliendo in una somma tutti gli antecedenti, ed in altra somma tutti i conseguenti, sarà la somma degli uni alla somma degli altri nella medesima ragion tripla, in cui si è veduto essere scambievolmente ogni antecedente al suo conseguente; Imperciocchè portando gli antecedenti 3, 4, 7 alla somma 14, e i conseguenti 9, 12, 21 alla somma 42, è manifesto che questo totale antecedente 14 contiene anch' esso, come ogn' altro parziale antecedente una terza parte del totale conseguente 42; e che in seguito esso 42 contiene tre volte l' antecedente 14; e potrà dirsi con verità che come sta 3 a 9, così 4 a 12; 7 a 21, e così ancora 14 a 42, lo che doveasi dimostrare.

TEO-

TEOREMA II. *Se un medesimo numero multiplicherà separatamente due numeri, i prodotti da questi saranno nella medesima ragione dei due numeri multiplicati*. Sia 4 il comune multiplicatore, che multiplicando primieramente 8, da per prodotto 32: indi multiplicando 12 produce 48. Ora io dico che starà 8 a 12, come 32 a 48, essendochè tanto 8 contiene due parti di 12, quanto 32 due terze parti di 48.

TEOREMA III. *Se di quanti numeri si vogliono in continua Proporzione il primo non misura il secondo, neppur uno tra tutti vi sarà, che ne misuri altri*.

Siano i numeri 16, 24, 36, 54, 81, di continua proporzione: dico, che siccome 16 non misura 24, contenendo solo due parti delle tre in cui dividerebbesi qui il 24, neppure il 36 per l' istessa ragione misurerà il 54, nè il 54 l' 81; perocchè tanto 36, che 54 contengono solo 2 delle tre parti in cui si dividono i respettivi numeri, che dovrebbero misurare, Che se si volesse fare una riprova per conoscere più sensibilmente se è vero, che i dati cinque numeri siano continuamente proporzionali, si prendano le differenze tra l'uno, e l' altro, cioè tra 16, e 24, che è 8, tra 24, e 36, che è 12, tra 36, e 54, che è 18, finalmente tra 54, e 81, che è 27; e trovato esser queste differenze in continua proporzione tra di loro, stando difatto 8 a 12, come 18 a 27; Si resterà pienamente certifica-

ti sì sulla continua proporzione dei cinque dati numeri, come sulla verità della proposizione, che se il primo numero proporzionale non misura il secondo, neppur alcun altro vi sarà, che ne misuri altri.

TEOREMA IV. *Se di quanti si vogliono numeri continuamente proporzionali il primo misura l' ultimo, misurerà anche il secondo.*

Siano di continua proporzione 3, 6, 12, 24, 48. de' quali il primo cioè 3, misura l' ultimo, che è 48, perocchè 16 via 3, produce 48 precisamente senz' alcun' avanzo; è manifesto che misurerà anche il secondo, essendoche 3 in 6 vi stà esattamente due volte.

TEOREMA V. *Se quanti si proporranno numeri di continua proporzione si multiplicheranno per se medesimi, tutti i loro prodotti saranno tra di loro ugualmente proporzionali; ed i numeri dati in principio multiplicando i loro stessi prodotti saranno sempre i risultati anche di questa multiplicazione continuamente proporzionali.* Siano i proposti numeri continuamente proporzionali 2, 4, 8: si multiplichino separatamente per se medesimi; i risultati saranno 4, 16, 64: dico essere ancor questi proporzionali, poichè come il 4 contiene una quarta parte di 16, così 16 contiene una quarta parte di 64. Che se questi medesimi numeri siano di nuovo multiplicati per i primi dati proporzionali 2, 4, 8, i prodotti della multiplicazione saranno 8, 64, 512, che pur son continui proporzionali: così multiplicando per 8 anche questi; ne risulterà 64, 512, 4096

4096, egualmente proporzionali che tutti i sopra osservati. E' bene di osservarne la certamente mirabile armonìa collocandone tutte le multiplicazioni così.

2	4	8
4	16	64
8	64	512
16	256	4096

Si prendano come piace questi numeri o verticalmente, o orizzontalmente multiplicandoli successivamente, se ne vedrà la sempre costante proporzione.

TEOREMA VI. *Se in tre numeri continuamente proporzionali, il primo è quadrato, anche il terzo sarà quadrato*. Siano i tre numeri in proporzione continua 9, 27, 81: dico, che siccome il primo è manifestamente quadrato, essendo che la radice 3 porta per suo quadrato 9, anche il terzo numero 81 sarà quadrato, imperocchè trovando la sua radice 9, e multiplicata per se medesima, viene incontrastabilmente a produrre 81.

TEOREMA VII. *Se di quattro numeri continuamente proporzionali il primo sarà cubo, anche il quarto sarà cubo*. Siano i quattro numeri dati 8, 24, 72, 216, de' quali è manifesta la continua proporzione, essendo che tanto 8 contiene una terza parte di 24, quanto 24 una terza parte egualmente di 72, e questo di 216,

 che

che vale a dire essere ugualmente multiplici uno dell' altro, e perciò continuamente proporzionali. Ora io dico, che essendo, qual è difatti 8 primo numero, numero cubo, anche il quarto 216 sarà cubo. Io che non ha bisogno di dimostrazione trevato che sia la radice cuba dell' istesso 216, che essendo 5, moltiplicata per se stessa successivamente darà appunto il numero 216, che conseguentemente si conoscerà esser cubo.

TEOREMA VIII. *Sia una serie di numeri in proporzione continua quanti si vogliono: se dal secondo, e dall' ultimo si sottragga un numero uguale al primo, sarà come il residuo del secondo al numero primo, così il residuo dell' ultimo a tutti gli antecedenti ad esso*. Sia la data serie di numeri 4, 12, 36, 108, 324, che già son continuamente proporzionali, poichè siccome 4 contiene una terza parte di 12, così 12 contiene egualmente una terza parte di 36; 36 di 108; e 108 di 324. Ora io dico, che se da 12, secondo numero si sottrae numero uguale al primo, cioè 4, e a 324, ultimo numero si sottrae egualmente il numero 4; 8 residuo di 12 starà a 4, come 320, residuo di 324 alla somma totale di tutti i numeri antecedenti 4, 12, 36, 108, che è 160; Imperocchè essendo questa somma la metà di 320, come 4 è la metà di 8, non vi è difficoltà a conoscere, che stia 8 a 4, come 320, a 160.

Ora che si è data qualche idea delle mirabili proprietà dei numeri proporzionali, e sopra tutto della serie numerica in proporzione

con-

continua; farà bene ridur quefta in pratica almeno in qualche cafo d' ufo frequente, e riducibile a più occorrenze di univerfale utilità. Prendafi ad efporre la regola per trovare i termini contenuti in una ferie di continua proporzione, la qual regola, come vedraffi, ha ordine allo fcioglimento di queftioni, e problemi di fucceffivi accrefcimenti, o diminuzioni, acquifti, o perdite, lucri &c.

Ammette quefta Regola due cafi diverfi; E tanto nell' uno, che nell' altro efige qualche cofa da trovarfi fpettante alla ferie proporzionale propofta. Nel primo cafo vuole la cognizione di due termini della propofta ferie. Nel fecondo fuppone conofciuto un folo termine della ferie medefima, ma con quefto che fi fappia qual ne è il *denominatore*; cioè il numero, che efprima la proporzione di un termine per rapporto all' altro: *ex. gr.* fe fi chiede qual fia il *denominatore* di quefta ferie continuamente proporzionale 2; 6; 18; fi rifponde che è 3 effendo quei tre numeri in progreffiva *tripla* proporzione; così dei numeri 4, 8; 16 è il *denominatore* 2, effendo la progreffione *dupla*; e fe foffe quadrupla, come in 4, 16; 64 farebbe 4 il *denominatore*, e con quefta regola procedendo negli altri cafi.

Diafi un' efempio adattabile al primo cafo, e fia di un Viaggiatore, che voglia fare l' intero circolo del Globo Terraqueo. Suppongafi, cofa inverifimile, ma pur foppongafi: che egli in un anno abbia percorfo di quefto giro fole

2 miglia, e che nel fecond' anno, avendone fcorfe 4, fia giunto alle 6 miglia di viaggio. Egli sà che l' intero giro della Terra, che fi è propofto di fare è di miglia 21600., vuol fapere quanti anni gli bifognerà impiegarvi, fuppofto che ogni anno faccia fucceffivamente un doppio viaggio dell' anno antecedente, come gli è riufcito nel fecond' anno rapporto al primo; nel qual cafo le miglia d' ogni dato anno unite al cumulo delle miglia degli anni antecedenti ftaranno alle medefime degli anni antecedenti in ragion tripla, come appunto 2 del primo anno rapporto a 4 del fecondo unite alle 2 medefime del primo. In confeguenza di che per inftituire la ferie proporzionale, avremo quì per *denominatore* della medefima il 3; Ed incominciando quefta ferie dal numero delle miglia del primo anno, vale a dire dal 2: Avremo nei feguenti numeri proporzionali, altrettanti annui progreffi del propofto viaggio, dicafi dunque :: 2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 12122. 36366. I quali numeri tutti fi può facilmente vedere, che ftanno fucceffivamente in ragion tripla uno per rapporto all' altro. Non effendovene però alcuno, che faccia la precifa fomma di 21600 numero delle miglia del giro della Terra, ma effendo l' ultimo maggiore di effe, ed il penultimo effendo minore; fi prendano per altro in confiderazione quefti due, come i più proffimi tanto verfo il più, che verfo il meno, e fottraggafi il minore 12122, dal maggiore 36366, e fi tro-

troverà l' eccesso di questo da quello essere 24244 . Inoltre si sottragga il numero delle miglia del Giro della Terra cioè 21600 , dal suddetto maggior numero 36366 , e si avrà l' altro eccesso di questo anche sopra il 21600, e sarà 14766. S' instituisca per mezzo di questi due eccessi questa Analogìa : sta 24244 , a 14766, come 365 (*cioè i giorni*, *che compongono un' anno*) a 222 (*giorni*) e $\frac{33}{66}$ cioè ore 12.

Ora ella è cosa manifesta , che se da nove anni nei quali le percorse miglia sarebbero arrivate a 36366 , si levino i giorni 222 e $\frac{33}{66}$ che ha prodotto la sopra instituita analogìa, resterà provato , che dalle due prime percorse miglia , potrà il Viaggiatore scorrer tutte le 21600 in otto anni , e 142 giorni ; cioè mesi 4 , giorni 22 , e ore 12 , che sono quella porzione di un anno sopra i 222 giorni, e ore 12 che si son dovuti sottrarre dall' anno nono perchè le miglia 36366 ad esso ascritte nella serie proporzionale , sorpassano, come si è veduto le fissate miglia 21600 , di 14766: al qual' eccesso corrispondono in compensativa proporzione i 142 giorni e ore 12 sottratti dal suddetto nono , ed ultimo anno di viaggio . Parrà forse ardua cosa il trovare in numeri così composti il quarto proporzionale, che nel proposto caso

si è veduto esser 222, e $\frac{33}{66}$, ma quando nella Lezione sulla Regola Aurea avremo assegnato le regole per trovar questo quarto proporzionale, si considererà per agevolissima cosa. Ben vero però che le frazioni, che vi possono occorrere, come quì sono occorse nei giorni 222, e $\frac{33}{66}$ si possono trascurare senza pregiudizio, o alterazione in conteggi, che non debbano poi portar seco un rigor matematico.

Per il secondo caso, che si era detto di ammetter questa regola, per chi intende, e sà mettere in ordine una proporzione continuata, e rilevarne per quel che si è detto di sopra il proprio *denominatore*, è cosa inutile il darne una spiegazione, reincidendo finalmente il tutto nella regola, ed esecuzione del dato esempio, E' ben per altro da osservare, che con questa regola si fanno egregiamente. e colla massima semplicità i conteggi di lucri successivi d' ogni maniera: onde ella è utilissima in moltissime occorrenze, e perciò da farne un gran caso: diamone un' esempio.

Sia proposta la somma di Scudi 6 (tanto è a dir 6, che 60, che 600, che 6000) questa somma 6 lucri tanto in un' anno, che cresca alla somma 18; si cerca in quanti anni, procedendo il lucro successivamente in tal tripla proporzione, avrà lucrato la somma 1400.

Si

Si instituisca la continua proporzione su i due termini 6, e 18, e dicasi : 6. 18. 54. 162. 486 1458. Non occorre proceder più innanzi, perchè siamo venuti a un numero maggior della somma proposta 1400. E serva di regola, che se nel procedere della serie proporzionale, ne vien per caso il preciso numero proposto, in esso si chiude la proporzione; se il proposto numero non vi può cadere, si prosegua la serie inclusivamente fino al numero prossimamente maggiore del proposto, talmente che il numero proposto abbia luogo tra il penultimo, e l' ultimo della medesima serie, come nel sopra posto esempio si vede; stando di fatto la somma 1400, tra il 486, ed il 1458. Or dunque sottratto dal maggior numero suddetto 1458 il minore 486, avremo il residuo 972: e sottratto dal medesimo maggior numero 1458 la proposta somma 1400; si avrà l' altro residuo 58: e siccome questi due residui stanno l' uno all' altro; cioè 972 sta a 58, come 365 (*numero già de' giorni dell' anno*) a 21, e $\frac{758}{972}$; non curata la frazione, che in simili conteggi, come si è detto niente altera, dai cinque anni, nei quali la somma primitiva 6 è cresciuta fino alla somma 1458, sottraendo giorni 21; rimangono 4 anni, e 344 giorni, nello spazio dei quali la detta somma 6 crescendo con lucro successivo ogn' anno in ragione tripla, avrà prodotto la somma di 1400.

DEL-

DELLA PROGRESSIONE

O PROPORZIONALITA' ARITMETICA

LEZIONE X.

PEr Progressione Aritmetica intendesi sempre una serie di più termini, o numeri, la differenza dei quali dagli immediatamente susseguenti è sempre la medesima come in questi: 3, 7, 11, 15, 19, 23, di ciascun dei quali, come si vede, la differenza è 4: o in questi altri: 3, 6, 9, 12, 15, 18. 21, 24, dei quali la differenza è 3. Generalmente dunque quando le proporzioni, dalle quali nasce la serie de' numeri son tali, che il conseguente di ciascun precedente termine, sia insieme precedente di quel che segue, una tal serie si dice *Progressione*, o *Proporzionalità*, la qual serie procede talora da un minore ad un sempre maggior numero, talvolta anche retrocede da un maggior numero, al minore che possa comportare la differenza dei termini della medesima. Per formar la prima, che chiameremo *Ascendente*, dati due numeri, *ex. gr.* 2 e 5, si aggiunga al maggiore la differenza tra l' uno, e l' altro, vale a dire a 5 si aggiunga 3, e sarà formato il terzo termine che è 8; così aggiunta a 8 la medesima differenza, si produrrà il quarto termine, e in tal modo procedendo quanto occorre. Per formar la seconda serie, che diremo *descendente*, dati due nu-

numeri *ex. gr.* 38, e 34, la loro differenza, che è 4, sottraggasi dal secondo numero 34, e resterà 30, terzo termine descendente, dal quale sottratta la medesima differenza, resta 26 quarto termine, dal quale sottratto 4, rimane 22; che tolto 4, resta 18, che rimane 14, tolta la solita differenza, e questo per la medesima sottrazione resta 10, che riducesi a 6, e questo finalmente a 2, nel quale non contenendosi più la differenza 4, rimane l' ultimo termine della *Proporzionalità descendente* 38, 34, 30, 26, 22, 18, 14, 10, 6, 2.

Se si vuol vedere con qual armonìa camina questa *Proporzionalità* si raddoppi il secondo termine 34, e dal prodotto 68 si sottragga il primo termine 38, ed ecco nel residuo il terzo termine 30, che duplicato, e fatto 60, se ne sottragga il secondo termine 34, e si avrà nel residuo il quarto termine 26; così duplicato questo, e sottrattone 30, si avrà 22 quinto termine, che reso doppio, cioe 44, e sottratto 26, nasce il sesto termine 18, dal qual doppio tolto 22, ne vien 14, e così gli altri fatta successivamente la medesima operazione.

Il più mirabile però della Progressione o sia Proporzionalità Aritmetica scopresi nelle proprietà, che qui brevemente ne osserveremo.

Quando il numero dei termini della Progressione, è casso, la somma dei due estremi è uguale al termine di mezzo duplicato; Siccome lo sarà ancora la somma del secondo, e del penultimo, e di quanti altri stano in eguali di-

distanze ai due lati del termine di mezzo sommati a due a due, *ex. gr.* in questa serie di 7 numeri 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27; la somma de' due estremi 3, e 27, che è 30, è eguale, come è manifesto, al termine di mezzo 15 duplicato, cioè a 30, e così il secondo, e penultimo, che pur fanno la somma di 30; e l' 11, e il 19, che sommano anch' essi il medesimo numero. Ed è osservabile di più, che la somma di tutti i sette numeri insieme (*e di quante altre serie in altro numero casso*), è sempre multiplice del termine, o numero di mezzo, come si può vedere nel dato esempio, dove tutta la somma è 105, ed il 15 termine medio preso sette volte dà esattamente l'istessa somma 105. Così se i numeri fosser nove, e ne fosse questa la progressione, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, della quale è 162 la total somma, sarà questa multiplice del termine medio 18, essendochè, 9 via 18 fa precisamente 162. E chi in una progressione di numeri in casso volesse trovar sicuramente, e facilmente la somma totale di tutti insieme i termini, prenda la metà della somma de' due estremi, e la multiplichi per il numero dei termini, i quali se per esempio fossero undici, e fossero questi: 7, 19, 31, 43, 55, 67, 79, 91, 103, 115, 127; la somma dei loro estremi è 134, prendendola per metà, ella è 67: Or dunque si multiplichi 67 per 11, che è il numero dei termini componenti la data serie, e ne risulterà 737, che per qualunque

que riprova, che se ne faccia, si troverà esser la precisa, total somma degli undici termini, o numeri componenti la serie progressiva suddetta, che ha per differenza il 12.

Si noti, come per Corollario, che la somma di tutti insieme i termini di qualunque Progressione Aritmetica, ancorchè fossero in numero pari, è similmente eguale al prodotto della multiplicazione della somma de' due estremi per la metà del numero dei termini; siccome ancora al prodotto della metà della somma de' due estremi multiplicata per il total numero de' termini: e se la serie Progressiva è in casso; la somma insieme di tutti i termini è eguale al prodotto della multiplicazione del termine medio per il numero de' termini componenti tutta la serie della Progressione.

Quando occorresse poi una serie di termini in Progressione Aritmetica di numeri pari, la somma allora degli estremi è eguale alla somma dei due medii, e degli altri a due, a due sempre equidistanti da due estremi. E la somma dei due estremi multiplicata per la metà dei termini componenti la serie progressiva, darà la total somma di tutta la serie; come per esempio in questa composta di dieci termini, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, i di cui estremi 3, e 30, fanno la somma di 33, che è uguale a quella de' due termini di mezzo 15, e 18, come già si vede: Questa somma 33 se si multiplichi per 5, cioè per la metà del numero dei termini componenti la proposta serie progressi-

va

va, darà 165 somma totale di tutti i dieci termini della serie medesima, che procede, come si può vedere, colla differenza 3.

Se di una serie di termini aritmeticamente progressivi si sappia l' ultimo termine, il numero, e la differenza dei medesimi, si potrà facilmente, ed ingegnosamente trovare il primo termine, per compor questa serie così. Sia l' ultimo conosciuto termine 59, e i termini della progressione debbano esser 12, e la differenza tra l' uno, e l' altro 5. Si prenda il numero prossimo minore al numero dei termini 12, e sarà 11. Si multiplichi questo per la differenza 5, e il prodotto, che sarà 55, si sottragga dall' ultimo termine 59, e resterà 4 che sarà il primo termine della progressione proposta, la quale potrà formarsi così 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59. Che se fosse noto il primo termine, e dovesse trovarsi l' ultimo, in vece di sottrarre il 55, prodotto dalla multiplicazione di 11, per 5 dovrebbe aggiungersi a detto 55, il primo noto termine 4, e si avrebbe nella somma 59 l' ultimo termine ricercato.

Oltre alle predette, son da notarsi le seguenti mirabili proprietà delle progressioni Aritmetiche, che esporremo in due Teoremi, e due Problemi

TEOREMA Primo. Qualunque termine si prenda in una progressione Aritmetica è eguale alla somma, che risulta dal primo termine, e dal prodotto della multiplicazione del numero dei termini, che precedono quello, che si è preso, per la differenza, o *denominatore* della

data progressione : *ex. gr.* In questa progressione 3, 7, 11, 15, 19, 23, Si prenda il termine 15. Io dico che esso è eguale al primo termine 3, unito al prodotto della multiplicazione del numero dei termini, che precedono il preso termine 15, i quali son tre, per la differenza, che è 4. Questo prodotto è 12 (*poichè* 3 *via* 4 *fa* 12) si unisca a questo numero il primo termine 3, avremo 15, che è il termine preso, e che mostra la verità della proposizione: E se vogliasi fare esperienza sopra qualunque serie di qualunque numero di termini, e col prendere qualunque termine della medesima, si troverà sempre l' istesso notabilissimo effetto.

TEOREMA II. In ogni Progressione Aritmetica la differenza tra il primo termine, e l' ultimo è eguale alla differenza comune (*cioè al denominatore della Progressione*) multiplicata per il numero dei termini di tutta la Progressione, toltagli un unità. Sia questa la Progressione : 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42: composta di otto termini, colla comun differenza 5. Se dal numero dei termini 8, si sottragga 1 resterà 7. Ora io dico, che secondo la Proposizione multiplicando 7 per la differenza 5, il prodotto sarà eguale alla differenza tra il primo, e l' ultimo termine. Questa differenza è 35, come è manifesto; ma il medesimo 35, è il prodotto del numero dei termini, toltone uno, per la comun differenza 5, essendochè 5 via 7 fa 35, dunque la Pro-

po-

posizione è assistita dalla verità .

PROBLEMA. Dato un numero, e la differenza tra due altri numeri incogniti, la somma dei quali si sa per altro essere eguale al numero dato , trovare quali siano questi due numeri . Sia il dato numero 290 : la differenza tra i due ignoti numeri sia 42 : Al 290 aggiungasi questa differenza, e ne risulterà la somma 332 , si divida questa per 2 ; darà il quoziente 166 . Io dico esser questo uno , e il maggiore dei due ignoti numeri. Imperciocchè si sottragga da esso la differenza 42, resterà 124 di residuo, che dico, esser l' altro ignoto numero . In fatti è manifesta tra essi la differenza 42 , ed è altresì vero, che sommati insieme, danno il dato numero : essendochè 166 più 124 fa 290.

Chiuderemo questa decima Lezione colla più piacevole, e sorprendente Operazione , cred' io , che possa farsi sulla Progressione Aritmetica , nella soluzione del seguente.

PROBLEMA . Tra due dati termini , trovare quel numero di termini, che piace aritmeticamente proporzionali , onde si formi la Progressione.

Si abbiano da trovare quattro termini medii tra i due termini dati 15 , e 50 : E' dunque manifesto, che tra i due termini dati, e i quattro , che si devon trovare, ne nascerà una serie di sei termini ; tra i quali vi si interporranno conseguentemente cinque differenze eguali . Il numero di queste differenze dev' es-

eſsere il *diviſore*, per cui s' han da dividere i due dati termini: Il qual *diviſore* per prenderlo ſempre giuſto ſi oſservi, che ſe al numero dei termini medii, che ſi voglion trovare ſi aggiunga 1, ſi avrà il giuſto *diviſore*, eſsendo che le differenze, le quali coſtituiſcono queſto diviſore ſon ſempre una più dei medii termini, che un ſi propone di trovare. Or dunque dividaſi nel noſtro caſo il primo termine 15, per 5, e trovato entrarvi tre volte, ſcrivaſi il *quoziente* 3 un buono ſpazio ſotto il 15, come qui vedeſi; dipoi dividaſi per l' isteſso 5 l' altro

15.	22 . 29 . 36 . 43 .	50
12		40
9		30
6		20
3		10

dato termine 50, che trovato contenere il 5 dieci volte, ſcrivaſi queſt' altro *quoziente* 10 in corriſpondenza al primo ſotto il 50. Si duplichino ſucceſſivamente i due quozienti dicendo ſul primo, tre, e tre fa 6; ſei, e tre 9; nove, e tre 12, e ſi ſcrivano l' uno ſopra l' altro queſti numeri, come qui ſi vede; Così ſi operi ſul quoziente 10, conducendolo fino a 40. Di queſte due colonnette 3, 6, 9, 12; e 10, 20, 30, 40, ſi ſommino i numeri due per due, uno d' una colonnetta, e uno dell' altra in modo, che nella prima ſi ſcenda dall' alto, al baſſo, e nella ſeconda dal baſſo, all' alto: vale a dire, ſi ſommi 12, numero ſuperior della prima, col 10 numero inferior della ſeconda; e così procedendo, il 9, col 20:

il 6, col 30 : il 3 col 40. Adunque, 12, e 10, fa 22; ed ecco il primo medio da scriversi dopo il 15: indi; 20, e 9 fa 29; ed ecco il secondo medio, che deve scriversi dopo il 22. Si prosegua; 30, e 6, fa 36, terzo medio, che si scrive nel quarto luogo della serie, che va formandosi; In ultimo 40, e 3 fa 43, quarto medio, che compie la serie proporzionale; nella quale può osservarsi con qualche sorte d' ammirazione, che la differenza che passa tra i due *Quozienti* 3, e 10, che è 7 è l' istessa che la differenza comune di tutti i termini della formata Progressione.

Facciasi pure esperienza, se si vuol vedere la costanza di questa regola, sopra altri esempj ricercando un numero diverso di termini medii. Se ne cerchino sei tra due dati estremi 14, e 35. Dovendo esser sei i medii, il *divisore* sarà 7 per quel che si è dato in regola di sopra : Il 7 nel 14 vi sta due volte, si scriva sotto, questo *quoziente* 2. Il 7 nel 35 vi sta 5 volte, scrivasi 5 in corrispondenza per l' altro *quoziente*. Si raddoppino successivamente, per

14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32 . 35	
12	30
10	25
8	20
6	15
4	10
2	5

formar le due colonnette come è stato fatto nell' altro esempio. Si sommino alternativamente le colonnette, la prima dall' alto al

basso

basso, l' altra dal basso all' alto, e si vedranno produrre i sei cercati termini medii a comporre la serie Progressiva di 8 termini.

Il più mirabile si è, che anche a proporre i due termini estremi senza aver riguardo se siano, o non siano suscettibili di proporzioni senza rotti, si può sempre, ed in ogni caso ottenere l' istesso effetto per via di numeri interi uniti alle frazioni, come nell' esempio seguente.

Siano i due dati termini estremi 7 e 29; i quali essendo numeri *primi*, vale a dir non multiplici, che dell' unità, non son suscettibili di alcun numero di medii formati da soli interi numeri. Abbiasi per altro da trovar tra essi quattro termini medii: Preso il 5 per divisore, secondo la prescritta regola, si veda quante volte entri nel 7, e trovato, che vi entra una volta, ed avanzano due unità; di queste se ne deve fare una frazione, di cui è *denominatore* il divisore 5, cioè $\frac{2}{5}$. Similmente veduto, che 5 entra cinque volte nel 29, ed avanzano quattro unità, se ne fa un' altra frazione $\frac{4}{5}$. I due Quozienti dunque saranno $1\frac{2}{5}$ e $5\frac{4}{5}$: si collochino al suo luogo

 al

$7.\ 11\frac{2}{5}\ 15\frac{4}{5}\ 20\frac{1}{5}\ 24\frac{3}{5}\ 29.$	
$5\frac{3}{5}$	$23\frac{1}{5}$
$4\frac{1}{5}$	$17\frac{2}{5}$
$2\frac{4}{5}$	$11\frac{3}{5}$
$1\frac{2}{5}$	$5\frac{4}{5}$

al solito: si duplichino i Quozienti, primieramente, dicendo: due volte 1, e $\frac{2}{5}$ fa 2 e $\frac{4}{5}$ che con aggiungervi di nuovo 1 e $\frac{2}{5}$ fa 4 e $\frac{1}{5}$ al quale aggiungendo un' altra volta 1, e $\frac{2}{5}$ fa 5 e $\frac{3}{5}$, così si formi l' altra colonnetta destra; e poi si sommino 5 e $\frac{3}{5}$ con 5, e $\frac{4}{5}$, che producono 10, e $\frac{7}{5}$, cioè 11, e $\frac{2}{5}$ primo medio; dipoi 4 $\frac{1}{5}$ sommato con 11, e $\frac{3}{5}$ fa 15, e $\frac{4}{5}$ secondo medio: proseguendo

do a sommare $2\frac{4}{5}$ con $17\frac{1}{5}$ produrrà 19, e $\frac{6}{5}$ cioè $20\frac{1}{5}$ terzo medio; In ultimo sommato 1 e $\frac{2}{5}$ con 23, e $\frac{1}{5}$ darà 24, e $\frac{3}{5}$ quarto medio. E si può osservare, che la differenza di 4 e $\frac{2}{5}$ che passa tra un Quoziente, e l' altro, la medesima hanno tra di loro tutti i sei termini della prodotta Progressione.

DELLA REGOLA AUREA

DETTA VOLGARMENTE *DEL TRE*

LEZIONE XI.

Articolo 1.

La grandissima utilità, che apporta questa Regola, le ha dato il merito d' esser chiamata *Aurea*. Dicesi poi ordinariamente *Regola del tre*, perchè suppone sempre dati *tre termini*, ai quali Essa poi insegna trovare il *quarto* proporzionale. Ond' è che a questa regola tutti quei Quesiti, o Problemi solamente appartengono, nei quali si cerca quel Termine

ne, che con i dati tre, costituisce il Quarto Proporzionale. Può in alcune Questioni, o Quesiti nascer difficoltà a conoscere qual dei tre dati termini debba dirsi, e costituirsi per Primo; sul qual punto è osservabile che questa regola non è sempre *diretta*, ma alcuna volta è *inversa*: Quando è diretta, il quarto termine ricercato dev' essere tanto maggiore, o minore del terzo, quanto il secondo è maggiore, o minore del primo: e in questo caso non ha alcuna difficoltà lo stabilimento del primo termine. Quando è inversa, il quarto termine dev' essere tanto maggior del terzo, quanto il secondo è minore del primo: O tanto minore del terzo, quanto il secondo è maggiore del primo. Lo stato della Questione farà conoscere l' opportunità o di maggiore o di minore nel quarto termine da trovarsi. Quello che è da avvertirsi si è, che conosciuta la Regola essere inversa, per più facilmente trovare il quarto termine Proporzionale, deve prendersi nell' enunciazione della Proporzione per primo termine il secondo, e per secondo il primo. Gli esempj spiegheranno tutto.

Si deve *ex. gr.* spianare una strada: 200 Braccia della medesima è costata 56 Scudi: quanto costerà 1250 Braccia? Qui si vede la Regola aurea diretta, e il quarto termine da trovarsi, vedesi dover esser tanto minor del terzo, quanto il secondo è minore del primo. Egli è 350, talmente che il Problema si scioglierà enunciando così la proporzione.

Se-

Se 200 porta 56 : 1250 , porterà 350 ?
Così in quest' altro esempio : Per sparare 20 Cannoni si richiede 274 libbre di polvere ; Quanta ne vorrà a spararne 49 ? Perchè anche in questo caso la regola è diretta , si troverà direttamente il quarto termine proporzionale colla differenza dal passato esempio , che qui sarà tanto maggiore del terzo , quanto il secondo è maggiore del primo : e si dirà : se 20 vuol 274 ; 49 , esigerà 671 , e $\frac{6}{20}$.

Per dar poi qualche esempio sulla Regola Aurea *inversa* , si supponga , che 20 uomini abbiano fatto in un giorno 245 braccia di strada ; quanti uomini si richiederanno per farne 750 ? Dove si vede chiaramente , che 20 , 245 . 750 , non possono esser termini in ragione diretta col quarto , che deve trovarsi , poichè il numero degli uomini , che si ricerca non può esser tanto maggiore del 750, quanto è il 245 del 20 ; Che anzi rappresentando il 750 tante braccia di strada, non potrà il numero degli uomini , che si ricercano uguagliar neppure detto numero 750 , non potendo richiedersi 750 uomini per fare 750 braccia di strada , come per farne 245 si è veduto non volervene 245 , ma soli 20 . Onde per enunciar rettamente questa Proporzione , si riordinerà così : se per far 245 braccia di strada si richiedono 20 uomini ; per farne 750 , quanti se ne richiederanno ? e in termini precisi : se

245

245 vuol 20: 750 che vorrà ? e ſi riſponde , che vorrà 61 e $\frac{1}{4}$ (cioè 61 uomini , e vi rimarrà per un uomo da lavorare per una quarta parte d' una giornata . E queſt' Eſempio deve far conoſcere, che la Regola Aurea, o *dei tre termini* non è mai inverſa , ſe non quando i termini del Problema ſon mal diſpoſti : e la natura medeſima poi della queſtione ſerve per inſegnare a chiunque a riordinarli .

ARTICOLO 2.

La difficoltà di trovare il quarto termine proporzionale ſpecialmente trattandoſi di numeri molto compoſti , e molto più ſe non ſiano ſuſcettibili di proporzione ſenza frazioni , ſi ſupererà , come ſi è accennato ſul fine della Lezione IX. colle ſeguenti .

Sei maniere di trovare il quarto termine Proporzionale per lo ſcioglimento d' ogni Problema della Regola Aurea .

I. Il ſecondo termine ſi multiplichi per il terzo (*quando il terzo ſia minor del ſecondo*) e il prodotto di queſta multiplicazione ſi divida per il primo termine : Il riſultato (*cioè il Quoziente*) di queſta diviſione, ſarà il quarto termine ricercato .

II.

II. Il terzo termine si multiplichi per il secondo (*quando il secondo è minore del terzo*) e il prodotto si divida per il primo , come sopra , e il risultato sarà il quarto ricercato termine .

III. Il secondo termine si divida per il primo (*quando il primo è minore del secondo*) e il prodotto, o *Quoziente*, si multiplichi per il terzo termine . Il prodotto di questa multiplicazione sarà il quarto termine , che si cerca .

IV. Il terzo termine si divida per il primo (*quando il primo è minore del terzo*) e il prodotto , o *Quoziente* si multiplichi per il secondo . Il risultato di tal multiplicazione sarà il quarto termine .

V. Il primo termine si divida per il secondo (*quando il secondo sia minore del primo*) e per il prodotto di tal divisione , o sia per il *Quoziente* , si divida il terzo termine . Il numero, o *Quoziente* che produrrà quest' ultima divisione , sarà il quarto termine .

VI. Il primo termine si divida per il terzo (*quando il terzo sia minor del primo*) e per il prodotto , si divida il secondo ; il numero prodotto da quest' ultima divisione , sarà il ricercato quarto termine .

ARTICOLO III.

Siccome occorrono poi dei Problemi solubili certo per mezzo della Regola Aurea , ma molto più complicati dei sin quì enunciati , co-

me quelli , che ſon compoſti di termini , dei quali alcuni , o tutti talora ſon compoſti di più numeri coerenti al reſpettivo termine ; vi è ſtato chi ha introdotto in queſta regola un' altra diſtinzione, dicendola *compoſta* in tali caſi e ricorrendo per lo ſcioglimento ad iſtituir tante proporzioni dell' aurea regola , quanti ſono i numeri coerenti nel reſpettivo termine : ma noi con maggior facilità , e chiarezza , ſoſtituiremo alla pluralità dei numeri coerenti nei dati termini un ſolo numero per ciaſcun termine , equivalente ai due , o tre , che coerentemente conſtituiſcano il dato termine: E queſto equivalente numero ſarà il prodotto di quei medeſimi numeri coerenti in un ſol termine , multiplicati ſucceſſivamente inſieme. Se ne eſamini il fatto con qualche eſempio .

Suppongaſi , che 3 Stampatori in 5 Meſi ſtampino 700 fogli : quanti ne ſtamperanno 5 Stampatori in 9 Meſi ? Qui abbiamo dunque il primo termine compoſto di due coerenti numeri , che ſono 3 Stampatori , e 5 meſi : il ſecondo termine è eſpreſso in un ſol numero , che è 700 : Il terzo è come il primo , compreſo in due numeri coerenti, e ſono 5 Stampatori , e 9 Meſi . Biſogna ridurre il primo termine a ſemplice numero , multiplicando uno per l' altro i due numeri , dei quali è compoſto , cioè 5 , per 3 , e il prodotto 15 coſtituirlo per primo termine : il ſecondo , perchè già eſpreſſo in un ſol numero , laſciarlo quale egli è, e multiplicare i due numeri del terzo ,

uno

uno per l' altro , cioè 9 per 5', e il prodotto 45 considerarlo terzo termine, e dire : se 15 dà 700 : 45 , che darà ? E si avrà per la prima maniera di trovare il quarto termine proporzionale , che dà 2100 . E sarà verissimo in fatti , che se 3 Stampatori in 5 Mesi danno stampati 700 fogli : 5 Stampatori in 9 mesi ne daranno 2100 .

Certo , che si ottiene il medesimo effetto facendo due operazioni, considerando composta la Regola aurea , prima prendendo il numero dei mesi nel primo , e terzo termine , non individuando il numero degli Stampatori , dicendo; se in 5 mesi un dato numero di Stampatori dà 700 fogli, in nove mesi quanti ne darà? e trovato , che ne darà 1260 ; facciasi nuova operazione non individuando il numero dei mesi ; ma bensì quello delli Stampatori, dicendo: se 3 Stampatori in un dato tempo danno 1260 fogli : (*prendendo cioè per secondo termine il quarto prodotto dalla prima operazione*) 5 Stampatori nel medesimo dato tempo quanti ne produrranno? e si troverà il medesimo quarto termine 2100 , che erasi prodotto di sopra con una sola operazione .

Diasi un' altro esempio , in cui i termini primo , e terzo siano composti non solo di due ognuno , ma di tre numeri coerenti . Suppongasi , che 8 Mercanti con 1000 Scudi abbiano in due mesi guadagnato 700 Scudi : quanti ne guadagneranno 10 Mercanti con 4000 Scudi in 6 mesi ? Qui il primo termine è composto di

tre

tre numeri coerenti ; cio è 8 Mercanti, 1000 Scudi, e 2 mesi : il secondo costa di un sol numero, ed è 700 : il terzo, come il primo ha tre numeri coerenti, e sono 10 Mercanti, 4000 Scudi, e 6 mesi. Riducasi il primo termine ad un solo numero, multiplicando prima 1000, por 8, e il prodotto poi 8000 per 2, che fa 16000 primo termine : il secondo 700 non ha bisogno di riduzione : il terzo riducasi come il primo multiplicando 4000 per 10, e quindi il prodotto 40000 per 6, che fa 240000, e dicasi ; se 16000 dà 700; che darà 240000? e si troverà dare il quarto proporzionale 10500.

L' istesso prodotto si avrà anche quì facendo tante operazioni, quanti sono i numeri coerenti tanto nel primo, quanto nel terzo termine, con questa legge, che nella prima operazione si ponga per primo termine gli 8 Mercanti ; per secondo i 700 Scudi di guadagno, e per terzo i 10 Mercanti ; senza specificare, o computare nè i mesi, nei quali è stato fatto il lucro, nè il danaro, che vi è stato impiegato. Nella seconda operazione si ponga per primo termine i 2 mesi ; per secondo il quarto termine, che ha prodotto la prima operazione ; per terzo i 6 mesi, senza computare, o specificare, nè il danaro impiegato nè il numero dei Mercanti. Nella terza operazione pongasi per primo termine gli Scudi 1000 impiegati dai primi Mereanti ; per secondo il quarto termine, che avrà prodotto la seconda operazione, e per terzo i 4000 Scudi

ima-

impiegati dagli altri 10 Mercanti, senza specificare, o computare nè il numero dei Mercanti, nè de' mesi nei quali è stato fatto il guadagno. E acciò vedasi più chiaramente questo complesso d' operazioni sia

8 Merc. lucr. 700 : 10 Merc. lucreranno 875
2 Mesi danno 875 : 6 Mesi daranno 2625
1000 Scudi danno 2625 : 4000 daranno 10500

Il medesimo prodotto anche per via di questo più lungo complesso di operazioni, può servir di riprova, che la prima maniera, che si è adottata è nella sua brevità altrettanto verace; essendo sempre vero, che se 8 Mercanti con 1000 Scudi ne lucrano in 2 mesi 700: 10 Mercanti con 4000 Scudi ne lucreranno in 6 mesi 10500.

Applicazione della Regola Aurea ai Contratti di Società.

ARTICOLO 4.

La Regola Aurea impiegata negli intralciati conteggi di società, insegna generalmente dividere un dato numero in parti proporzionali ad altri dati numeri. L'aggregato in una somma di questi altri dati numeri deve costituire il primo termine proporzionale; Il secondo termine deve essere il dato numero da distribuirsi in parti: Per il terzo termine devon servire quei dati numeri, dei quali è l' aggregato il primo termine. E perchè bisogna instituire

tan-

tante regole auree, quanti saranno questi numeri dati, dovranno essi successivamente scriversi per altrettanti terzi termini per trovare altrettanti quarti proporzionali: e di queste regole auree il primo, e il secondo termine è sempre, ed in tutte, quante esser devono, l' istesso. Spieghiamoci con un esempio. Siano i tre Mercanti, Cajo, Mevio, e Sejo, che fatta insieme società, abbiano fatto il guadagno di Scudi 4500. Suppongasi che Cajo abbia messo nella comune lucrante massa Scudi 100, Mevio 150, e Sejo 200. Si cerca qual somma convenga a ciascuno del comun lucro di Scudi 4500? si sommino primieramente insieme le contribuite somme 100, 150, e 200, e del loro aggregato 450, se ne costituisca il primo termine della Regola aurea; Per secondo termine pongasi la somma del comun lucro 4500: Il terzo termine deve essere il denaro contribuito dai Mercanti; ma siccome tutti tre hanno contribuito somma diversa, bisogna instituir più regole auree. e perchè le somme son tre, tante saranno le regole, o proporzioni da instituirsi.

Prima 450 dà 4500: che darà 100? risp. 1000.
Seconda 450 dà 4500: che darà 150? risp. 1500.
Terza 450 dà 4500: che darà 200. risp. 2000

Vuol dir che a Cajo, che avea contribuito 100, convien 1000 di parte del lucro, a Mevio, che avea dato 150, ne convien 1500, a Sejo, che avea dato in massa 200. ne conviene 2000.

Che

Che se, come suole spesso avvenire, le date somme contribuite dai respettivi componenti la società siano implicate con più numeri coerenti; Come se Cajo abbia contribuito Sc. 100, i quali siano stati in società per 16 mesi: Mevio ne abbia contribuiti 140, e siano rimasti in società per 10 mesi: e Sejo finalmente ne abbia contribuiti 300, ma siano stati in società soli 7 mesi. Suppongasi, che abbian fatto il guadagno di Sc. 10200, quanti ne verrà a ciascuno? E' necessario prima ridurre a semplici le contribuzioni di ognuno; essendosi osservato, che sono esse implicate con coerente numero diverso di mesi. Si pratichi dunque ancor qui la regola assegnata all' Articolo 3 di questa Lezione, e si multiplichi ogni numero della contribuzione per il respettivo coerente numero dei mesi: cioè i 100 Sc. di Cajo per i 16 mesi, e sarà il prodotto 1600 equivalente a i due coerenti numeri appartenenti a Cajo. Indi multiplicati i 140 di Mevio per i 10 mesi: si avrà l' equivalente prodotto 1400, finalmente dalla multiplicazione di Sc. 300 di Sejo per i 7 mesi, si avrà il prodotto equivalente 2100. Semplicizzati così questi tre numeri, se ne faccia la total somma; o aggregato 5100, che come nel primo addotto esempio deve servir di primo termine: siccome il total guadagno 10200 deve essere il secondo; e per terzo devon porsi nelle tre Regole auree, che si hanno anche in questo caso da instituire i sopraddetti numeri equivalenti alle respettive

con-

contribuzioni, e mesi coerenti 1600, 1400, e 2100. Siano dunque le seguenti le proporzioni da instituirsi.

Prima 5100 dà 10200, che 1600? risp. 3200
Seconda 5100 dà 10200, che 1400? risp. 2800
Terza 5100 dà 10200, che 2100? risp. 4200

Dunque Cajo, che ha lasciato in società 100 Sc. per 16 mesi riporterà di parte di suo lucro Sc. 3200: Mevio, che ha tenuto in società 140 Sc. per 10 mesi, avrà per parte di lucro Sc. 2800; finalmente Sejo, che tenne in società Sc. 300 per 7 mesi riporterà di suo lucro Sc. 4200.

Applicazione della Regola Aurea all' operazione della semplice, e doppia falsa Posizione.

ARTICOLO 5.

Dicesi Regola di falsa posizione, o di falso supposto quella, nella quale realmente si fa la falsa supposizione, che un numero preso ad arbitrio, o a caso possa sodisfare ad una data questione, cioè possa esser quello, che si ricerca: Ma esaminando su questa supposizione la proposta questione, quantunque si trovi erroneo il numero, e non sodisfacente, pur nondimeno insegna la regola il modo, che questo medesimo erroneo, e falsamente supposto numero conduca allo scoprimento del vero, ricercato numero, e che dia la giusta soluzione del Problema. Questa regola dicesi di *semplice falsa* po-

posizione, quando insegna a scoprire il vero numero per mezzo di un sol falso supposto, o sia d'un sol numero erroneo. Quando poi insegna a trovare il vero numero ricercato per via di due falsi supposti, o di due numeri erronei, dicesi di *doppia falsa posizione*.

Regola di semplice falsa Posizione.

§. 1.

Prescrive primieramente questa regola, che preso ad arbitrio un numero, si metta in esperienza con i dati della proposta questione, per iscuoprire se scioglie, o nò la difficoltà proposta: se per un caso, direbbemo prodigioso, sodisfacesse, sarebbe finita l'operazione, ma non sodisfacendo, deve scoprirsi, che non sodisfà per via di qualche suo conosciuto falso prodotto. Ora questo falso prodotto sarà il numero erroneo, per mezzo del quale deve trovarsi il vero sodisfacente numero. Prescrive la regola in secondo luogo, che per trovare il vero numero per mezzo dell' erroneo bisogna valersi della regola aurea; per primo termine della quale si deve prendere il trovato numero erroneo: Per il secondo il numero, che si era da principio preso ad arbitrio: Ed il terzo termine deve esser il numero cognito, o dato nella questione; e trovato a questi tre termini il quarto proporzionale, sarà questo il numero, che si ricercava. Diamone un esempio.

Tre artefici Cajo, Sejo, e Tizio hanno

fatto insieme 7000 Scudi di guadagno in un anno coll' esercizio della medesim' arte ; ma non hanno fatto tutti il medesimo numero di opere, o giornate di lavoro; perchè Cajo ha lavorato 270 giornate , o sia 9 mesi : Sejo 180, o sia 6 mesi : e Tizio 90 , ovvero 3 mesi . Si cerca quanto debba avere ognuno dei 7000 Scudi di guadagno.

Qui scoperto che sia quanto si deva ad uno dei tre Artefici , si deduce subito quanto convenga agli altri due , poichè al secondo conviene il doppio del terzo , avendo operato doppio numero di mesi , al primo il triplo di quello si deve al terzo , avendo operato un triplicato numero de mesi , nei quali ha operato il terzo . Prendasi pertanto un numero ad arbitrio supponendolo la somma dovuta a Sejo, e sia 200 . Secondo questa supposizione , la parte di Tizio , che dev' esser la metà sarà 100. , e quella di Cajo, che dev' esser triplice a quella di Tizio, sarà 300 . L' aggregato adunque, o somma di queste tre porzioni sarà 600; ma secondo lo stato della questione dev' esser 7000 ; il numero 200 adunque preso ad arbitrio , non scioglie il Problema, ma porta al numero erroneo 600; il quale prendasi per primo termine nell' istituzione della regola aurea; per secondo 200, numero preso già da principio ad arbitrio, e per il terzo 700 , numero dato esprimente il total guadagno : e trovato il quarto termine proporzionale , che è

è 2333, e $\frac{2}{6}$; ſarà queſta la vera tangente di Sejo: La porzione di Tizio, dovendo eſſer la metà di queſta ſarà 1166, e $\frac{4}{6}$, quella finalmente di Cajo, che dev' eſſer tripla di queſta ſarà 3500: le quali tre porzioni ſommate inſieme è troppo manifeſto produr la total ſomma delli Sc. 7000; coſtituenti il dato total guadagno giuſtamente diſtribuito.

Regola di doppia falſa Poſizione.

§. 2

Queſta regola, che è più univerſale aſſai della precedente, preſcrive primieramente, che preſo, come nella precedente, ad arbitrio un numero nella ſuppoſizione che poſsa eſſere il ricercato per lo ſcioglimento del Problema, ſi eſperimenti colla debita operazione ſe dia il deſiderato prodotto, e trovato che queſto prodotto ſia erroneo, ſi noti di queſto numero erroneo la differenza per rapporto al dato cognito numero, che avrebbe dovuto produrre ſe il ſuppoſto non foſſe ſtato falſo. Un' altro falſo ſuppoſto biſogna fare, ſcegliendo ad arbitrio un' altro numero, che non dando neppur eſſo il prodotto giuſto, ſe ne noti la differenza dal predetto dato numero, come ſi è detto del primo numero erroneo. Si deve in ſeguito inſti-

tuire la regola aurea, della quale il primo termine sia la differenza tra le due differenze dei numeri erronei col dato cognito numero (quando i due numeri erronei siano o ambedue maggiori, o ambedue minori del dato numero cognito), che se dei numeri erronei uno sia maggiore, e l' altro minore, il primo termine proporzionale sarà l' aggregato degli errori, o per dir più giusto, l' aggregato delle due differenze dei numeri erronei dal dato conosciuto numero: Il secondo termine sia la differenza tra i due numeri presi sul principio ad arbitrio: e il terzo termine sia la differenza del primo numero erroneo dal dato conosciuto numero del Problema. Si deve trovare al solito il quarto termine proporzionale, al quale si deve unire il primo numero preso ad arbitrio in principio dell' operazione qualora sia minore del dato numero nel Problema, poichè se fosse maggiore si dovrebbe sottrarre da esso il trovato quarto termine, e si avrebbe nel residuo il cercato numero. Sia per esempio che

Cajo, Sejo, e Tizio si abbiano a dividere un comun guadagno di 400 scudi, che Sejo per altro debba averne 12 più di Cajo; e che a Tizio se ne debbano 16 più, che a Sejo. Cercasi qual sia la somma, che è dovuta a ciascheduno. Si devono prima di tutto prender successivamente due numeri ad arbitrio, e vedere quanto erroneo diano il prodotto dal noto sopradetto numero 400. Sia il primo arbitrario numero, che si prende 1, e rappresenti la porzio-

zione dovuta a Cajo: Secondo le fissate condizioni del Problema, la porzione dovuta a Sejo sarebbe 13 scudi, e quella di Tizio sarebbe 29, e tutta la loro somma 43 scudi. La differenza pertanto di 43 da 400, che è il numero dato, è 357 si prenda ora il secondo numero ad arbitrio, che rappresenti per falsa supposizione la porzione del medesimo Cajo, e sia 2. In questo caso la porzione di Sejo sarebbe 14, e quella di Tizio 30 e la somma di tutte 46, che ha per differenza dal dato numero 400, 354. Vengasi ora ad instituire la regola aurea, il primo termine della quale (essendo che l' uno, e l' altro numero erroneo è minore del numero dato 400), sarà la differenza de' due numeri 357, e 354, che è 3. Il secondo termine sarà 1. differenza tra i due numeri 1, e 2 presi ad arbitrio. Il terzo termine sarà 357 differenza tra il primo numero erroneo 43, e il dato numero 400. Il quarto proporzionale si troverà esser 119, al quale si aggiunga 1, primo numero preso ad arbitrio, e sarà 120, che dico esser la giusta porzione spettante a Cajo. Imperocchè, aggiungendovi 12 per far la porzione di Sejo 132, e a questa aggiungendo 16 per far la proporzionata parte di Tizio 148; è cosa manifesta, che le tre somme 120, 132, 148, unite in una total somma, danno il 400; che è appunto il numero degli scudi da doversi dividere tra le tre divisate persone nella data proporzione.

La soluzione di questo, e di qualunque altro Problema solubile per la regola di doppia fal-

falsa posizione, si può ottenere anche nella seguente, poco differente maniera.

Trovati, come sopra, i numeri erronei 43, e 46, e le loro differenze rapporto a 400 cioè 357, e 354, si deve multiplicare questa seconda differenza 354 per 1 primo numero preso ad arbitrio; e la prima differenza 357 per il secondo numero arbitrario 2 e si avranno le due somme 354, e 714 che hanno per differenza tra di loro 360 che diviso per 3, che è la differenza tra 357, e 354, si avrà in prodotto, o quoziente 120 porzione di Cajo, come sopra.

Per dare un altro esempio su questa regola di doppia falsa posizione; suppongasi l' età di Cajo contener due volte l' età di Tizio, e poi anche 4 anni di più. E che l' età di Sejo contenga l' età di Cajo insieme, e di Tizio, e 6 anni di più; Le età poi di tutti tre facciano la somma di anni 60. Si cerca la precisa età di ciascheduno.

Regolandoci come sopra, suppongasi l' età di Tizio, essere anni 1, dunque l' età di Cajo sarà 6, dovendo esser doppia di quella di Tizio, con quattro anni di più: E quella di Sejo, che deve contener l' età di Tizio, e di Cajo, e di più 6 anni, sarà 13; sommate insieme queste tre età, danno 20 primo numero erroneo, non adequando il dato total numero 60; e passandovi la differenza 40. Suppongasi di nuovo esser anni 10 l' età di Tizio: in conseguenza quella di Cajo sarà 24, e quella di Sejo 40 che in una sola somma fanno 74 secondo numero erro-

neo

neo per eccesso dal 60, colla differenza sopra di esso di 14. Osservisi qui che dei due numeri erronei 20, e 74, uno è minore, e l' altro è maggiore del dato numero 60, e però venendo alla instituzione della regola aurea, per primo termine, come si è osservato sul principio di questo §. 2. non dovrà prendersi la differenza tra i due numeri 40, 14, ma bensì l' aggregato di essi due numeri, che è 54: Il secondo termine sarà al solito la differenza tra i due numeri presi ad arbitrio, (che nel presente esempio sono 1, e 10), e conseguentemente sarà 9: Il terzo termine sarà 40, cioè la differenza del primo numero erroneo 20: e trovato il quarto proporzionale $6\frac{2}{3}$ imperocchè sta 54 a 9 = come 40 a $6\frac{2}{3}$, ed aggiunto ad esso il numero primo preso arbitrariamente che è 1, (perocchè il primo numero erroneo 20 è minore di 60); si avrà $7\frac{2}{3}$ che è l' età di Tizio: Infatti seguendo la fissata proporzione, l' età di Cajo porta anni $19\frac{1}{3}$ e quella di Sejo 33 che sommate insieme, danno il dato numero di anni 60.

PRO-

PROBLEMI ARITMETICO - GEOMETRICI SCIOLTI PER DIMOSTRAZIONE ALGEBRICA.

LEZIONE XII.

SUl fondamento delle paſſate Lezioni ſtimaſi di fare utile, e grata coſa, dando quì un introduzione alla più mirabil parte della Matematica, qual è l' Algebra ; della quale ſebbene non ſia del noſtro aſſunto il dar lezione, e non ſiavi conſeguentemente luogo di eſtenderſi ſulle nozioni tutte, ed operazioni della medeſima : Pur non oſtante da quanto ſi oſſerverà ſulle ſeguenti dimoſtrazioni, e ſoluzioni di Problemi, ſi potrà acquiſtar tanto lume, che coll' appoggio del quì dato corſo Aritmetico, verrà l' ingegno a metterſi nella retta via, onde per mezzo poi degli ovvii trattati d' Algebra, giunger per ſe ſteſſo con eſtrema facilità al poſſeſſo di queſta mirabile ſcienza.

Nei primi cinque problemi, che quì ſi proporranno, e che coſtituiranno queſta XII. Lezione, a più facile intelligenza dei principianti, uſeremo tutta l' eſtenſione delle parole in luogo dei comunemente uſati ſegni ; i quali ſi noteranno, e ſi praticheranno nella Lezione futura.

E' per altro neceſſario dar quì alcuna notizia ſulle quantità Algebriche, le quali, come ſi vedrà, vengono indicate per via di let-

te-

tere dell' Alfabeto, onde l' Algebra si definisce, *Aritmetica o calcolo litterale*, in cui con poche lettere si può esprimere qualunque quantità numerica. Queste quantità che vengono specificate, e determinate colle voci, o segni di *più*, di *meno* d' *eguaglianza*, di *multiplicazione*, di *divisione &c.*, o sono positive, o negative. Un soldo *ex. gr.* che si possiede, è quantità positiva; se chi possiede questo soldo è poi debitore del medesimo, esso è per lui una quantità negativa, poichè il debito ne distrugge il possesso, e si dirà posseder nulla. Chi poi finalmente nulla possedendo, sia debitore di qualche cosa, si potrà dire aver meno di nulla; e quindi apparirà la sottigliezza dell' Algebra, nello scendere nelle sue dimostrazioni sotto il nulla. Tanto le quantità positive, che le negative son talvolta semplici, e talvolta composte. Quantità semplici, o *monomie*, cioè di un solo termine, o nome, son quelle che non sono legate ad altre quantità coi segni, o voci *più*, o *meno*, come X eguale a 4; Z eguale a 10 &c. Quantità composte poi son quelle che son costituite dal complesso di più quantità, come X *più* Z eguale a 4 *più* 10 Z meno X eguale a 10 meno 4: le quali quantità perchè composte di due, si diranno *Binomie*, e se fosser composte di tre *Trinomie* se di 4 *Quadrinomie &c.* e generalmente *Polinomie*.

Le varie occorrenze nei Problemi sì di questa, come della seguente Lezione, ci daranno campo di spiegare quanto sarà necessario, per

per supplire alla necessaria cognizione della multiplicazione, e divisione delle quantità Algebriche.

PROBLEMA I. *Si devono trovare due numeri, i quali finchè saranno ignoti, si chiameranno A, e B. Due son le notizie, che si hanno intorno ad essi.*

I. Che la loro differenza è 12.

II. Che A minor numero, stà a B maggior numero, come 2 a 3.

DIMOSTRAZIONE. Perchè la differenza dei due ignoti numeri è 12, dunque B (*che è il maggiore*) meno A è uguale a 12. E per *Antitesi*, o sia *Traspos̄izione* (*per intelligenza della quale vedasi in fine la regola* 1.) B sarà eguale a 12 più A. *Perocchè se* 5 *meno* 2 *è eguale a* 3; *sarà* 5 *eguale a* 3 *più* 2. Ma si è supposto nella seconda notizia, che A stia a B come 2 a 3; Dunque A multiplicato per 3 sarà eguale a B multiplicato per 2. E si è dimostrato sopra, che B è eguale a 12 più A; dunque A multiplicato per 3 è uguale a 12 più A multiplicato per 2. *Questa conseguenza vien giustificata nella Lezione IX., ove si prova, che il prodotto della multiplicazione de' due estremi* (*che son qui A, e* 3) *è eguale al prodotto della multiplicazione de' due medii* (che qui sono B, e 2). Ed essendo l'istessa cosa il dire A multiplicato per 3 che tre volte A: e l'istessa cosa pure il dire; 12 più A multiplicato per 2; che due volte 12, e due volte A: sarà dunque conseguente il dire, che tre A sono eguali a 24 più due A; e che tre A meno

due A sono eguali a 24: *Valendo sempre ancora quì la trasposizione, o sia Antitesi, benchè inversa; poichè se 5 è eguale a 3 più 2: Il medesimo 5 meno 2 sarà eguale a 3*. Se dunque tre A meno due A (*vale a dire un solo A*) son eguali a 24; dunque A è eguale a 24. Ma B si è veduto essere eguale a 12 più A; dunque B è eguale a 12 più 24, che val a dire 36: dunque A è 24 e B è 36 che erano i due numeri, che ci eramo proposti di trovare.

PROBLEMA II. *Si hanno da trovare due numeri che si diranno per ora A e B: due notizie si hanno sopra di essi.*

I. Che il loro aggregato, o sia somma è 60.

II. Che stà A a B come 2 a 3.

DIMOSTRAZIONE. Essendochè, per la prima notizia A più B sia eguale a 60; sarà dunque A eguale a 60 meno B, *per la ragione resa evidente in numeri nel primo problema*. Ma per la seconda notizia sta A a B come 2 a 3; dunque 60 meno B (*che equivale a A*) sta a B come 2 a 3: dunque per la sopra allegata ragione degli estremi, e medii proporzionali, 60 multiplicato per 3 meno il prodotto di B multiplicato per 3; è eguale a B multiplicato per 2. Ed è l' istesso, che dire; 180 meno tre B è eguale a due B. Dunque per *Antitesi*, 180 è eguale a due B più tre B, vale a dire, a cinque B dunque la quinta parte di 180 è eguale a un B: dunque B è eguale a 36 quinta parte di 180: Ma è stato stabilito in principio, che A è eguale a 60 meno B; dunque A è eguale a 60 meno 36,

cioè a 24. Resta dunque provato, che dei due numeri ignoti A, e B il primo è 24, e il secondo 36.

PROBLEMA III. *Deve trovarsi che numero sia X senz' altra notizia, che i due numeri 76, e 4 presi separatamente, son minori di X; e che difetto di 76 dal numero X, stà al difetto di 4 dall' istesso X, come 1 a 4.*

DIMOSTRAZIONE. Perchè X meno 76 (*cioè il difetto di* 76 da X) stà, *per la sopradetta notizia*, a X meno 4 come 1 a 4; dunque X meno 76 multiplicato per 4 è eguale a X meno 4 multiplicato per 1 (per la ragione più volte addotta, che il prodotto della multiplicazione degli estremi è eguale a quello de' medi) ed in conseguenza quattro X meno 304 (*quantità equivalente ad X meno 76 multiplicato per* 4) saranno eguali a X meno 4: dunque *per Antitesi* quattro X meno X (*cioè tre X*) son eguali a meno 4, più 304 *val a dire a* 300. E se tre X son eguali a 300; dunque X e eguale a 100, che è il numero che si ricercava, e per restar persuasi, che è questo, si osservi avverarsi non solo, che egli è maggiore de' due numeri 76, e 4, ma ancora, che 24. difetto del 76 da 100, stà a 96, difetto di 4 dall' istesso X cioè 100, come 1 a 4; essendochè 24 è una quarta parte di 96 come 1 è una quarta parte di 4.

PROBLEMA IV. *Deve trovarsi il numero X sapendosi, che i due numeri 60, e 40 son maggiori di esso, e che l' eccesso di 60 sopra X stà all' eccesso di 40 sopra il medesimo X come 3 a 1.*

DIMOSTRAZIONE. In conseguenza, ed equivalentemente alla enunciata proporzione stà dunque 60 meno X a 40 meno X, come 3 a 1: dunque (*per la proporzione dei due estremi* 60 meno X, e 1 *con i due medj* 40 *meno X, e* 3,) 60 meno X multiplicato per 1, sarà eguale a 40 meno X multiplicato per 3: dunque 60 meno X (*che può prendersi anche per il prodotto della multiplicazione, essendo il multiplicatore* 1;) sarà eguale a 120, meno tre X, e per *Antitesi*, meno X più tre X, *ovvero equivalentemente*, tre X meno un X, son eguali a 120 meno 60; dunque due X sono eguali a 60. Dunque X è eguale a 30. Ed ecco che essendo 30 l' eccesso di 60 sopra X, e 10 l' eccesso di 40 sopra l' istesso X; è manifesto che sta 30 a 10, come 3 a 1, lo che fa vedere incontrastabilmente che l' ignoto numero X è 30.

PROBLEMA V. *Si deve trovare il numero X sulla notizia, che il difetto che ha* 60 *dal ricercato numero X stà all' eccesso di* 180 *sopra il medesimo X come* 1 *a* 5.

DIMOSTRAZIONE. Essendo quì i due conosciuti numeri 60, 180, uno minore, e l' altro maggiore dell' ignoto numero X, bisognerà dire, coerentemente alla data proporzione, che stando X meno 60 a 180 meno X come 1 a 5; dunque (*per la nota proporzione dei due estremi coi due medj*) X meno 60 multiplicato per 5 sarà eguale a 180 meno X multiplicato per 1, cioè al semplice 180 meno X: dunque cinque X meno 300 (*cioè meno* 60 *multiplicato per* 5) sono eguali a 180 meno X: e per Antite-

si cinque X più X son eguali a 180 più 300 dunque sei X son eguali a 480, e un solo X è eguale a 80. E venutosi ora in cognizione che 20 è il difetto di 60 da X, e che 100 è l' eccesso di 180 sopra il medesimo numero X, si vede manifesto che sta il difetto 20 all' eccesso 100 come 1 a 5.

Che se si esigesse una maggior certezza, che tutte le varietà d' inversioni, e di conversioni che porta seco l' Antitesi producon sempre il vero, si esamini in numeri l' occorrente in questo Problema; cioè che se è vero che cinque X meno 300 son eguali a 180 meno X, è anche vero per *Antitesi*, che cinque X più X son eguali a 180 più 300. *Imperocchè essendosi trovato che X è uguale a* 80 *e cinque X in conseguenza eguali a* 400; *si vedrà subito che se* 400 *meno* 300, *e eguale a* 180 *meno* 80; *anche* 400 *più* 80, *sarà eguale a* 180 *più* 300.

PROBLEMA VI. *Sia da dividersi il numero* 348 *in due parti X, e Z in modo, che un terzo d' X aggiunto a un quarto di Z faccia* 98.

Qui si devon trovare le due parti di 348 X, e Z, per mezzo della notizia, o assegnata condizione che un terzo d' X, o sia X diviso per 3, con di più un quarto di Z, ovvero Z diviso per 4, debba far la somma di 98.

DIMOSTRAZIONE. Essendo già stabilito, che X più Z è eguale a 348; dunque per Antitesi Z sarà eguale a 348 meno X: ma è fissato altresì che X diviso per 3, con di più Z diviso per 4, è eguale a 98; dunque X diviso

per

per 3, e più 348 meno X diviso per 4 è similmente eguale a 98. Vien dunque per *Antitesi*, che X diviso per 3, e meno X diviso per 4, è eguale a 98, e meno 348 diviso per 4: che è l' istesso che il dire, a 98 meno, 87, cioè a 11. Ma riducendo le due frazioni *un terzo, e un quarto* d' X al medesimo comune denominatore 12, sarà equivalente un terzo meno un quarto d' X a quattro dodicesimi, meno tre dodicesimi d' X si dirà dunque X diviso per 3: (*cioè un terzo* d' X) meno X diviso per 4, (*cioè meno un quarto* d' X) essere eguale a quattro X divisi per 12, e meno tre X divisi per 12; cioè ad un solo X diviso per 12: dunque X diviso per 12 è eguale a 11. E se un dodicesimo d' X è eguale a 11, tutto X dunque è eguale a 11 multiplicato per 12, cioè a 132. Ma si è veduto dal bel principio per via d' *Antitesi*, che Z è eguale a 348 meno X, dunque Z è eguale a 348 meno 132, che vale a dire a 216. Ed ecco, che diviso in due parti il numero 348, (*perciocchè i due ora conosciuti numeri X, e Z cioè* 132, 216 *uniti in una somma fanno* 348) un terzo della parte 132 unito a un quarto della parte 216, fa 98, lo che dovea riuscire per assicurarci d' aver con verità dimostrato, che i due ignoti numeri X, e Z sono 132, 216.

LE-

LEZIONE XIII.

FAtto nella precedente Lezione un primo, facilitato esercizio sulle Problematiche elementari dimostrazioni estese, e spiegate alla comune intelligenza; Egli è ora tempo di aggiungerne alcun' altra secondo le espressioni Analitiche delle Equazioni nell' Algebra servendoci anche noi degli infrascritti comunemente in Algebra usati segni, in luogo delle espressioni di parole, delle quali ci è sembrato espediente il valerci nella soluzione dei precedenti Problemi. I segni che occorreranno nelle dimostrazioni che faremo sono i seguenti, uniti ai loro significati.

† Questo segno significa *più*.

— Questo significa *meno*.

= Questo significa è *eguale*, o *sono eguali*.

Per significa, *Diviso per*.

In significa, *Multiplicato per*.

A2 o a qualunque altra lettera dell' Alfabeto si trovi annesso il numero 2 dalla parte destra, come qui si vede alla lettera A2, significa, *Quadrato di A*, *di B*, *di Z* &c. se alla lettera è annesso il numero 3, come X3, significa *Cubo* del numero indicato dalla data lettera. Se il 4, come A4, o X4, vuol significare il quadrato — quadrato del numero, valore della data lettera.

2A Precedendo poi così il numero alla lettera, significa, che quella lettera, o il valore della medesima và preso tante volte, quante sono le unità che contiene il numero, che

la

la precede. Così 3A significa tre A, o sia A, o suo valore preso tre volte. Così 4B, 5C, 6X &c, significano, che quattro volte deve prenderſi il valore di B, cinque quello di C, sei quello d' X &c.

1. *Cond.* significa, *Per la prima Condizione.*

2. *Cond.* significa, *Per la seconda Condizione.*

3. *Cond.* significa, *Per la terza Condizione.*

Per aver poi un' ajuto generalmente, a conoscere la varietà, e multiplicità delle formule equivalenti, si consultino le sei Regole, che daremo in fine, le quali per conciliar brevità alle dimostrazioni citeremo in appresso per mezzo di numeri Romani, così (I) (II) (III) (IV)(VI); e significheranno; *Per la Regola prima = Per la Regola seconda = Per la Terza &c.*

Nota. La particella congiuntiva *e* tramezzo alle formole d' Equazione indica, che la soggiunta quantità deve prendersi separatamente, cioè non se ne deve far somma colle quantità antecedenti moltiplicandole, o dividendole insieme: *ex. gr.* 2X, e *più* 35 *per* 7, vuol dire, che la divisione deve farsi del solo 35 *per* 7, non de' 2X insieme; al contrario 2X più 35 *per* 7 indica doversi dividere per 7 tutta la quantità costituita dal valore de' 2X, e da 35.

Per assicurarci poi di non cagionare imbarazzo agl' inesperti nella prima dimostrazione, che ora daremo medianti i sopraddetti segni: replicheremo l'ultima della precedente Lezione,

 coll'

coll' estensione medesima, sostituendo alle parole i detti occorrenti segni. Lasciata la Proposizione si venga alla

DIMOSTRAZIONE. Essendo già stabilito, che $X + Z = 348$; dunque (I) $Z = 348 - X$: Ma è altresì fissato che X *per* 3, e + Z *per* 4 = 98; dunque X *per* 3, e + 348 — X *per* 4 = 98. Ne vien dunque (I.) che X *per* 3, e — X *per* 4 = 98, e — 348 *per* 4; che è l' istesso, che il dire; a 98 — meno 87, cioè a 11. Ma riducendo le due frazioni *un terzo*, *e un quarto* d' X al medesimo comune denominatore 12, sarà equivalente un terzo — un quarto d' X a quattro dodicesimi — tre dodicesimi d' X: Si dirà dunque X *per* 3, e — X *per* 4, = 4X *per* 12, e — 3X *per* 12; Cioè ad X *per* 12. Dunque X *per* 12 = 11. E se un dodicesimo d' X = 11; Tutto X dunque = 11 *in* 12. Cioè a 132. Ma si è veduto da principio, che $Z = 348 - X$. dunque $Z = 348 - 132$, che vale a dire $= 216$. E' dunque manifesto che $X = 132$, e $Z = 216$.

PROBLEMA VII. Si devono trovare due numeri X e Z.

I. Condizione: La loro differenza sia 12, cioè $X - Z = 12$.

II. Condizione, che tolta la quarta parte del numero Z dalla terza parte del numero X resti 9, cioè: X *per* 3, e — Z *per* 4 = 9.

DIMOSTRAZIONE. Essendo che per la prima condizione sia $X - Z = 12$; Sarà *per*

Tra-

Traſpoſizione, o *Antiteſi* — Z = 12 — X: Ma (2. *Cond.*) X *per* 3, e — Z *per* 4 = 9. dunque X *per* 3, e † 12 — X *per* 4 = 9, eſſendoſi veduto ſopra, che — Z è equivalente a 12 — X. Ed eſtendendo i termini di queſta conſeguenza, (III) X per 3, e † 12 *per* 4, e — X *per* 4 = 9. Dunque per *Traſpoſizione* (I) X *per* 3, e — X *per* 4 = 9, e — 12 *per* 4, cioè = 9 — 3, vale a dire a 6. Ma riducendo al medeſimo denominatore le due frazioni d' X: X *per* 3, — X *per* 4 = 4 X *per* 12, e — 3X *per* 12, dunque 4X *per* 12, e — 3X *per* 12 = X *per* 12. Ma X *per* 3, e — X *per* 4, ſi è provato eſſere eguale a 6: dunque anche 4X *per* 12, e — 3X *per* 12, vale a dire X *per* 12 = 6; e in conſeguenza X = 6 *in* 12. Ma 6 *in* 12 = 72, dunque X = 72: Ma ſi era rilevato da principio, che — Z = 12 — X; dunque Z = — 12 † X, ma X è = 72; dunque Z = — 12 † 72; cioè a 60. Dunque X = 72, e Z = 60, il che dovea dimoſtrarſi.

Nota. *Potrebbe indurre della difficoltà quella formola* (— Z = 12 — X): *Ma per intendere a dovere queſta, e altre ſimili, biſogna ſapere, che una delle maſſime ſottigliezze dell' Algebra è quella di ſcendere a computare i numeri anche ſotto il nulla, e così farſi più ampio luogo alle ſue per poco impoſſibili dimoſtrazioni. Così nella ſuddetta formola intendeſi, che tante unità meno del nulla, quante ne contiene Z, (che ſi è veduto contenerne* 60) *ſono eguali a* 12 *meno tan-*

te unità , quante ne ſono in X , che ſi è veduto averne 72 : dunque 12 meno X vuol dir 12 meno 72 , e non potendo toglierſi a 12 più delle ſue 12 unità ; quando dunque il 72 con dodici delle ſue unità ha conſumato , diciamo così, tutto il 12 , gliene rimangono 60 , che computate dal nulla in giù , vanno preciſamente a trovare il valore di — Z , cioè 60 unità meno del nulla ; e ſarà dunque veriſſimo, che — Z = 12 — X, vale a dire — 60 = 12 — 72. E così ſarebbe egualmente vero che — 3 = 2 — , 5 o che — 7 = 10 — 17.

PROBLEMA VIII. Si hanno a trovare due numeri X , e Z.

1. Condizione ; Che l' aggregato, o ſomma di eſſi ſia 12 , cioè : X † Z = 12.

2. Condizione : Che X *in* Z = 20.

DIMOSTRAZIONE. Se (1. *Cond.*) X †Z = 12 ; dunque *per Tranſpoſizione* (I.), Z = 12 — X. Ma (2. *Cond.*) X *in* Z = 20 ; dunque X *in* 12 — X = 20 : ed eſtendendo la formola (III.) X *in* 12, e† X *in* — X = 20. E compendiando la medeſima conſeguenza ; 12X — X2 = 20 , dunque X = 10; E ſi è veduto Z = 12 — X ; dunque Z = 12 — 10, cioè a 2

Nota I. *la formola* X in 12, e † X in — X = 20, *può forſe crederſi biſognoſa di qualche ſpiegazione ; ma col ſaper il valore d' X , che è* 10 , *ſe ne può fare ognun da ſe ſteſso la ſpiegazione , dicendo* : che X cioè 10 multiplicato per 12 (*che fa* 120) più 10 multiplicato per meno 10 , è eguale a 20 , vale a dire ; 10 via

12 . più 10 volte meno 10 , che fa meno cento , è eguale a 20 . *Ed è veriſſimo, poichè ſe a centoventi , che è la multiplicazione di* 10 *per* 12 *aggiungo meno cento , che vuol dir appunto toglierli cento , certo che riman* 20 . *E quindi appariſce eziandìo giuſta la compendiata conſeguenza* $12X - X2 = 20$: *perocchè tanto è il dire* $12X - X2$, che X in 12, † *X* in $- X$, *eſſendo equivalente eſpreſſione di negativo quadrato d' X lo ſcrivere* $- X2$, *oppure* X in $- X$.

Nota 2 *Parrà precipitata la conſeguenza* , dunque $X = 10$. *Ma è coſa coſtante in ogni dimoſtrazione ſimile a queſta , come nelle tre ſeguenti , che quando di due numeri , o ſiano l' uno , e l' altro quadrati , o cubi ; o uno sì , l' altro nò ; ma che uno ſia poſitivo , e l' altro negativo , cioè , che uno abbia anneſſo il più , l' altro il meno ; quando , diſſi , la differenza di due tali numeri viene a fare l' equazione dei medeſimi ; Queſta differenza , preſa per metà eſprime la radice del Quadrato del numero in queſtione , cioè il numero ſteſſo , come vedeſi nella preſente dimoſtrazione , ove* $12X$, *vale a dir* 120, *ed il quadrato X , cioè* 100 , *hanno per differenza* 20 , *che fa l' equazione tra eſſi numeri* $12X - X2$, *e preſa per metà , che è* 10 , *queſto numero* 10 *è la radice inſieme del quadrato X, cioè* 100 , *ed il medeſimo numero ſemplice X , cioè* 10.

PROBLEMA IX. Trovare due numeri X, e Z , colle appreſſo Condizioni .

1. Cond. Che la differenza tra X, e Z, ſia 8 cioè che $X - Z = 8$.

2. Cond. Che X multiplicato per Z faccia 20, cioè X *in* Z = 20.

DIMOSTRAZIONE. Se $X - Z = 8$; *per Trasposizione* (I.) sarà $- Z = 8 - X$: dunque *per contrapposizione di segni* (II.) sarà $Z = - 8 + X$: Ma (2. *Cond.*) X *in* $Z = 20$: dunque X *in* $- 8 + X = 20$. Ed estendendo la formola, sarà X in X e $+ X$ in $- 8 = 20$; che è la medesima cosa, che il dire $X^2 - 8X = 20$, e in conseguenza (*secondo la* 2. *nota dell' antecedente Problema*) $X = 10$. Ed avendo dimostrato, che $Z = - 8 + X$; dunque $Z = - 8 + 10$, vale a dire $= 2$.

Per venir sempre più in cognizione della forza delle formule, o scrizioni Algebriche; colla cognizione, che X è eguale a 10, e Z a 2; facciasi la dimostrazione di questo nono Problema in numeri.

Se dunque $10 - 2 = 8$; sarà $- 2 = 8 - 10$: dunque $2 = - 8 + 10$. Ma (2. *Cond.*) 10 *in* 2 = 20, dunque 10 *in* $- 8 +$ 10 = 20. Dunque 10 *in* 10, e + 10 *in* $- 8 = 20$, cioè il quadrato di $10 - 80 = 20$, dunque &c.

PROBLEMA X. *Devon trovarsi due numeri X, e Z.*

1. Condizione. Che il prodotto d' X *in* Z sia 20.

2. Condiz. Che la somma dei quadrati d' X, e Z sia 104.

DIMOSTRAZIONE. Essendo (1. *Cond.*) X *in* $Z = 20$; sarà dunque (V) $Z. = 20$ per X: Ma

Ma (2. *Cond.*) $X2 + Z2 = 104$; dunque $X2$, e + 20 per $Xq = 104$; e conseguentemente $X2$, e + 400 per $X2 = 104$; dunque (I.) 400 per $X2 = 104 - X2$, e (V.) dunque $400 = 104$ in $X2 - X2$ *in* $X2$, e in conseguenza $400 = 104X2 - X4$. E (*per la nota* 2. *del Probl.* 8.) $X = 10$, e $Z = 2$.

Nota. *La lettera* q *posta alla destra di una lettera , significa il numero indicato dalla medesima lettera multiplicato per se stesso , come si è veduto in questa dimostrazione , in quella conseguenza* : dunque $X2$, e + 20 *per* $Xq = 104$, che vuol dire , il quadrato d' X , e più 20 , diviso per X) *che dà il quoziente* 2), e questo 2 multiplicato in se stesso $= 104$.

PROBLEMA XI . Si devono trovare due numeri X e Z .

1. Condizione ; che $X - Z = 8$, cioè che la loro differenza sia 8 .

2. Condizione, che $X2 + Z2 = 104$, cioè che l' aggregato , o somma de' loro quadrati sia $= 104$.

DIMOSTRAZIONE . Dappoichè (*per* I. *Cond.*) $X - Z = 8$; sarà dunque (I.) $X = 8 + Z$: E sarà $X2 = 8$ *in* 8 , cioè a 64 , e + 16Z + Z2. Ma (2. *Cond*) $X2 + Z2 = 104$; dunque $64 + 16Z + Z2 + Z2 , = 104$. Dunque (I.) $16Z + 2Z2 = 104 - 64$; e in conseguenza $2Z2 + 16Z = 40$, dunque (*per la nota* 2. *del Probl.* 8.) $Z = 2$, e X conseguentemente $= 10$.

Nota. *La cifra* 2Z2 *spiega due Z quadrati,* *cioè*

cioè 8 , e così qualunque lettera che abbia due numeri , qualunque essi siano uno a destra , e l' altro a sinistra , quello a sinistra significa , che deve prendersi la data lettera tante volte, quante unità contiene il dato numero ; quello a destra se è 2 significa quadrato , *se è* 3 Cubo , *se è* 4 quadrato quadrato ; *onde deve prendersi le tante volte spiegate dal primo numero la detta lettera* o quadrata , o Cuba , o quadrato - quadrata .

PROBLEMA XII . Devono trovarsi due numeri X , Z .

1. Cond. Che X multiplicató per Z produca 15 , cioè X *in* Z = 15.

2. Cond. Che la differenza dei quadrati d' X , e Z sia 16 , cioè $X2 - Z2 = 16$..

DIMOSTRAZIONE . Se (1. *Cond.*) X *in* Z = 15 ; dunque (V.) Z = 15 per X , e conseguentemente Z2 = 15 per Xq : Ma (2. *Cond.*) X2 — Z2 = 16 ; dunque X2 , e — 15 per Xq = 16 : Ed equivalentemente X2 e — 225 *per* X2 = 16 . Dunque (I.) — 225 *per* X 2 = 16 — $X2$, ed in conseguenza (V.) — 225 = 16 — $X2$ *in* $X2$, cioè a 16$X2$ — $X4$. Dunque $X4$ — 16$X2$ = 225 , e (*per la nota* 2. *del Probl.* 8.) X = 5 , e Z = 3.

Seguono alcuni Problemi più pratici, appartenenti a materie subordinate all' Aritmetica , o alla Geometrìa .

LE-

LEZIONE XIV.

PROBLEMA I. . *Se Cajo dasse a Tizio due Scudi, Tizio ne avrebbe il doppio di Cajo medesimo. E se Tizio ne dasse due a Cajo, ne avrebbe quattro volte più di Tizio. Quanti Scudi ha dunque Tizio, e quanti Cajo?* Si ha da indicare la somma di Tizio per mezzo della lettera A, e quella di Cajo colla lettera B.

1. Condizione. Che A + 2 deve stare a B — 2 come 2 a 1.

2. Condizione. Che B + 2 deve stare ad A — 2 come 4 a 1.

DIMOSTRAZIONE. (1. *Cond.*) A + 2 sta a B — 2 come 2 a 1: dunque (VI.) A + 2 *in* 1 = B — 2 in 2: e (III.) A + 2 = 2B — 4: dunque (I.) A + 2 + 4 = 2B: ed in conseguenza A + 6 = 2B: Ed A + 6 per 2 = B. Ma (2. *Cond.*) B + 2 stà ad A — 2 come 4 a 1; dunque A + 6 *per* + 2 + 2 sta ad A — 2 come 4 a 1, dunque A + 10 *per* 2 sta ad A — 2 come 4 a 1; dunque (VI.) A + 10 *per* 2 in 1, = A — 2 in 4, E quindi (III.) A + 10 *per* 2 = 4A — 8. Dunque A + 10 = 4A — 8 *in* 2, vale a dire, A + 10 = 8A — 16, dunque (I.) 10 + 16 = 8A — A; cioè 26 = 7A, dunque A = 26 *per* 7: cioè, A = 3, e cinque settimi. Ma si è dimostrato, che A + 6 *per* 2 = B, e in conseguenza A + 6 = 2B; dunque 2B = 3, e cinque settimi + 6, cioè a 9, e cinque settimi: Dunque B = 4, e sei settimi.

E

E' dunque manifestamente provato, che Tizio aveva Scudi 3, e cinque settimi, cioè lire 5 e che Cajo avea Scudi 4, e sei settimi, cioè lire 6. Ed è verissimo, che se Tizio dasse due Scudi a Cajo; di 3, e lire 5 gliene resterebbe 1, e lire 5, e quelli di Cajo diverrebbero 6, e lire 6, che sono esattamente quattro volte più, che 1, e lire 5. E se al contrario Cajo avesse dato a Tizio Scudi 2; Tizio ne avrebbe avuti 5, e lire 5, che sono appunto il doppio di quelli che sarebbero rimasti a Cajo, che sarebbero 2, e lire 6.

PROBLEMA II. *Un Giovine studioso ha impiegato una parte di una notte nello studio, e l' altra in dormire, non sà di quante ore sia composta quella notte, sà solamente d' aver consumato in studiare due ore più che nel sonno, ed in oltre, che le ore date allo studio multiplicate per l' ore date al sonno danno il prodotto di* 19, *e un quarto. Vuol sapere quante ore ha studiato, e quante ore ha durato la notte.*

Le ore dello studio si chiamino B. Quelle del sonno si chiamino C, e la durazione della notte si dica A.

1. Condizione $B - 2 = C$.
2. Condizione $B + C = A$.
3. Condizione B *in* $C = 19$ e un quarto.

DIMOSTRAZIONE. Dunque (1. *Cond.*) $B - 2 = C$: ma (3. *Cond.*) B *in* $C = 19$ e un quarto; dunque B *in* $B - 2 = 19$, *e un quarto*, dunque (III.) $B2 - 2B = 19$, *e un quarto*. Dunque $B = 5$, *e mezzo*, secondo

la

la nota 2 al Probl. 8. Ma si è detto, che B — 2 = C; dunque C = 3 *e mezzo*; E (2. *Cond.*) B + C = A; dunque A = 5, *e mezzo*, + 3 *e mezzo*, vale a dire = 9. Lo studio dunque fu di ore 5, *e mezza*, e la notte fu di ore 9.

PROBLEMA III. *Cajo avrebbe* 100 *Scudi prendendo la metà di quei di Tizio: Anche Tizio ne avrebbe* 100 *colla terza parte di quei di Mevio. E Mevio stesso ne avrebbe* 100, *avendo la quarta parte di quei di Cajo. Si ha da trovare quanti Scudi abbia ciascuno.*

Per poter più comodamente avere e la metà degli Scudi di Tizio, e il terzo di quei di Mevio, e la quarta parte di quei di Cajo; si prenderà in ipotesi, che gli Scudi di Cajo siano 4X; quei di Tizio siano 2Z, e quei che ha Mevio siano 3P.

1. Condizione 4X + Z = 100.

2. Condizione 2Z + P = 100.

3. Condizione 3P + X = 100.

DIMOSTRAZIONE. Se (1. *Cond.*) 4X + Z = 100; ne viene (I.) che Z = 100 — 4X, e che 2Z = 200 — 8X. Ma (2. *Cond*) 2Z+P = 100: dunque 200 — 8X+P = 100. Dunque (I.) P = 100 — 200 +8X, che è l'istesso che il dire P = a — 100 + 8X. Dunque 3P = a — 300 + 24X: Ma (3. *Cond.*) 3P+X = 100: dunque — 300 +24X + X = 100. Dunque (I.) 25X = 100 + 300, cioè a 400, e perchè stà 25X a 400, come 4X a 64; dunque 4X = 64. Ma si è veduto che 100 —

$4X = Z$: dunque $Z = 100 - 64$, vale a dire a 36. Dunque $2Z = 72$. Finalmente essendosi dimostrato che $3P = a - 300$, e † $24X$; ovvero $a - 300$, e † $4X$ *in* 6, o sia $- 300$, e † 64 *in* 6; oppure finalmente $- 300$ e † 384, cioè a 84; Dunque $3P = 84$. E come si era dimostrato, che $4X = 64$: $2Z = 72$; ora vien provato, che $3P = 84$: resta innegabilmente scoperto, che Cajo ha Scudi 64, Tizio 72, e Mevio ne ha 84. Imperciocchè se a i 64 di Cajo si aggiungesse la metà di quei di Tizio, cioè 36, sarabber di fatto 100, come dice la Proposizione; così se a quei di Tizio si aggiunga la terza parte di quei di Mevio, ognun vede che divengono 100 egualmente: così in fine se agli 84 Scudi di Mevio aggiungasi la quarta parte di quei di Cajo, vale a dire 16 Scudi, saranno egualmente 100.

PROBLEMA IV. *Cajo, e Tizio fecero società con questo patto, che il lucro dovesse corrispondere al denaro contribuito dall' uno, e dall' altro. Cajo contribuì 60 Scudi, che rimasero in società per 9 Mesi; Non si sà qual lucro corrisponda a questa somma. Nè si sà qual somma abbia contribuito Tizio; si sà solo, che essa rimase in società per 6 Mesi; scorsi che furono i quali Tizio per suo lucro, e per il denaro contribuito ricevè 60 Scudi. E' poi manifesto finalmente, che il lucro dell' uno, e dell' altro insieme fu 65 Scudi. Si vuol sapere qual lucro convenga ad ambedue, e qual somma fosse contribuita a Tizio.*

Si ſupponga, che il lucro di Cajo ſia Z, e la ſomma contribuita da Tizio ſia X, e che conſeguentemente il lucro di Tizio ſia 60 — X, dappoichè per il lucro, e per la contribuita ſomma ricevè 60 Scudi.

1. Condizione. $Z + 60 - X = 65$.

2 Condizione ſtà Z a 60 — X, come 9 *in* 60, a 6 *in X*.

DIMOSTRAZIONE. Eſſendochè (1. *Cond.*) $Z + 60 - X = 65$: ſarà (I.) $Z - X = 65 - 60$, cioè a 5. E per conſeguenza $Z = 5 + X$. Ma (2. *Cond.*) ſtà Z a 60 — X come 9 *in* 60, a 6 *in* X; dunque $5 + X$ ſtarà a 60 — X come 9 *in* 60, a 6 in X, cioè come 540 a 6X. Dunque (VI.) $5 + X$ *in* $6X = 60 - X$ *in* 540. E (III.) $30X + 6X^2 = 32400 - 540X$. E (I.) $6X^2 + 30X + 540X = 32400$. Dunque $6X^2 + 570X = 32400$: (*E per la* 2. *nota al Probl.* 8. *Lezione* 13) $X = 40$; Ed inoltre $Z = 5 + X$, vale a dire $= 5 + 40$, cioè $= 45$. *Ed ecco reſo manifeſto che* 40 *Scudi avea contribuito Tizio, e che ſiccome ne avea egli ritirati* 60 *tra lucro, e capitale;* 20 *Scudi era la ſua tangente di lucro.*

A Cajo poi che avea meſſo il Capitale di 60 *Scudi, ſi conveniva di lucro Scudi* 45.

Dei

Dei rimedj delle Equazioni esposti in sei Regole per le quali si possono riordinare, contrarre o abbreviare, ed estendere, e sostituire secondo il bisogno la particella in alla particella per, e viceversa.

REGOLA I. detta *Antitesi*. Questa regola insegna, che se $3 + 2 = 5$: sarà $2 = 5 - 3$: oppure $3 = 5 - 2$; Similmente se $3 + 4 = 12 - 5$: sarà $3 + 4 + 5 = 12$. Così supposto che $A + B = C$; per questa regola giustamente s' inferisce, che $A = C - B$; come ancora, che $B = C - A$. E se A, e + B *in* C $=$ D; sarà $A = D$, e $-$ B *in* C, e similmente $A = D$, e + B *in* $-$ C. Parimenti se sia A e + B *per* $C = D$; sarà $A = D$, e $-$ B *per* C, e similmente $A = D$, e + B *per* $-$ C.

Per veder chiaramente, che queste Traspofizioni di termini vanno rettamente a dare la supposta proporzione, alle lettere si sostituiscano i numeri presi arbitrariamente, e dicasi *ex. gr.* supposto che $5 + 3 = 8$, per questa regola giustamente s' inferisce, che $5 = 8 - 3$, come ancora che $3 = 8 - 5$. E se 3, e + 5 *in* 6 $= 33$; sarà $3 = 33 - 5$, in 6, e similmente sarà $3 = 33 - 6$ *in* 5. Parimenti se sia 4 e + 8 *per* $2 = 8$; sarà $4 = 8$ $-$ *per* 2.

REGOLA II. Che insegna a fare illazioni per via di mutazione di segni, in segni opposti. Così supposto $A = B$, s' inferisce legittimamente che $- A = - B$. O se $A - B =$

C. S' inferisce che $- A + B = - C$. Supposto secondariamente che A, e + B *in* C = D, si può inferire $- A$, e $- B$ *in* C. = $- D$, e che $- A$, e + B *in* $- C = - D$. Supposto inoltre, che A, e + B *per* C = D; potrà legittimamente dirsi, che $- A$, e $- B$ *per* C = $- D$, e che $- A$, e + B *per* $- C = - D$. Supposto finalmente, che A *in* B in C = D; si potrà inferire, che $- A$ *in* B *in* C = $- D$, e che A *in* $- B$ *in* C = $- D$, e finalmente che A *in* B *in* $- C = - D$.

REGOLA III. Che insegna a fare illazioni abbreviando, o estendendo le formule contenenti le particelle *in*, o *per*. Ex. gr. alla breviata formula A + B *in* C, equivale la più estesa A *in* C, e + B *in* C. Siccome a quest' altra A + B *in* C $-$ D, equivale A *in* C, e + A *in* $-$ D, e + B *in* C, e + B *in* $-$ D. Parimente alla breve formula A + B *per* C, equivale A *per* C, e + B *per* C. Così a questa A + B *per* C $-$ D, equivale A *per* C, e + A *per* $-$ D, e + B *per* C, e + B *per* $-$ D.

REGOLA IV. e V. Che insegna a liberare una parte dell' Equazione dalla particella *per*, o *in* Ex. gr. supposto che A *in* B = C, si potrà dire A = C *per* B, ed anche B = C *per* A. Inoltre supposto che A + B *in* C = D + E; potrà dirsi, A + B = D + E *per* C: ovvero C = D + E *per* A + B. E se A *per* B = C; si dirà, A = C *in* B. Se finalmente A + B *per* C = D + E; secondo questa regola sarà, A + B = D + E in C.

REGOLA VI. Che insegna liberar l' Equa-

zioni dalle particelle *ad* ovvero *a* nell' italiano cangiandole nelle particelle *in* , e viceversa . Ex. gr. suppoſto che ſtia A a B , come C a D ; ne ſegue che A *in* D = B *in* C ; perchè nei quattro termini proporzionali A , B , C , D , il prodotto della multiplicazione de' due eſtremi A D è eguale al prodotto della multiplicazione de' due medj B , C . Così ſe A†B ſta a C *per* D , come E *in* F , a G , ne viene legittimamente che A†B *in* G , = E *in* F in C *per* D .

Nota . *Ridotte in numeri le lettere impiegate in queſte regole , come ſi è fatto alla Regola I. ſe ne potranno veder più manifeſte le verità degli inſegnamenti* .

RACCOLTA

Di varie ingegnose applicazioni pratiche delle principali Operazioni Aritmetiche esaminate, e spiegate in quest' Opera.

LEZIONE MISCELLANEA

Articolo 1.

PErchè non sempre si vorrebbe in pratica seguire estesamente in certe occorrenze le divisate operazioni tutte; E perchè si danno ancora moltissimi casi nella pratica implicati, e dipendenti da più operazioni, e lungo sarebbe troppo il farle distintamente, e regolarmente; Si vogliono propor quì alcuni ingegnosi compensi, e ripieghi equivalentemente atti ad espedirsi in compendio da molti sì ordinarj, che straordinarj conteggi, che occorrer possono. Prima di tutto per altro bisogna togliere alcune difficoltà, che nascer possono in pratica nelle quattro principali Operazioni; e cominciando dall' *Addizione*, bisogna restar primieramente persuasi, essere un' Operazione questa sulla quale non può immaginarsi nè più breve, nè più facil via dell' indicata, al suo luogo; essendo solo da raccomandarsi la diligenza, e l' attenzione per non errare. E per quanto i pratici Operatori di Aritmetica siansi provati ad inventar regole per assicurarsi con riprova

dell' esattezza di quest' operazione, le loro regole, oltre all' essere più tediose, e più lunghe dell' operazione medesima, si trovan false ben spesso, perchè non assistite da fondamentale, e retta ragione: Ed una, che se ne suol dare non fallace, non può dirsi propriamente riprova, ma solo una replica colla sola differenza che si scrivano prima le sole unità sopra le diecine, senza riportare, o computare nelle susseguenti colonne nè diecine, nè centenari, nè altro; e quindi poi si scrivono In altro ordine di numeri le occorrenti diecine, centenarj &c., da raccogliersi poi in una somma con gli altri numeri computati come si è detto: Operazione, come ognun vede, che è di maggior tedio, che non è il rivedere attentamente l' operazione, che siasi fatta secondo la vera regola, senza dovere scriverò altri numeri, e che per altra parte non ci può dar mai alcuna maggior sicurezza di aver operato senza errore. Non dovrà già dirsi così della riprova, che abbiamo suggerito alla Lezione seconda, perocchè dal far di nuovo il computo delle colonnette dall' alto al basso (posto che la prima volta siasi fatto dal basso all' in su), è vero, che ne può venir coll' istessa facilità dell' errore, ma non il medesimo errore, attesa che il computo d' ogni colonnetta camina in sempre diverse proporzioni; E se poi tanto il prodotto del computo fatto dal basso all' alto, quanto quello dall' alto al basso si troverà combinare nell' istessa egual

somma

ſomma , ſi potrà eſser certi , come da ſicura riprova , che il computo è ſenza errore.

Per una ſpeditiſſima operazione del ſommare , libera dall' imbarazzo del riportare le diecine , centenarj &c. alle ſuſſeguenti colonne , piacemi di dar quì la ſeguente . Si computino le date colonnette di numeri , e ſi ſcrivano a parte , non le ſole unità oltre alle diecine , centenari &c. , ma tale quale il numero , o ſomma , che producono ; e ſi ſcrivano come appreſſo . La prima Colonnetta a deſtra dele unità dà 23 , che ſcriveſi a parte , come qui ſi vede : la ſeconda colonnetta delle diecine dà 22 , che ſcriveſi , come qui vedeſi , in modo , che il primo numero abbia il valore locale di centenario ; perciocchè 22 diecine ſon 220.

	23
	220
4267	3000
5824	22000
2391	——
4845	25243
7916	——
——	

La terza colonnetta de' centenarj dà 30 , che ſcriveſi in modo , che il primo numero tenga luogo di millenario , poichè 30 centenari ſono 3000. La quarta colonnetta finalmente de' millenarj dà 22 , che ſcriveſi in modo , che al primo numero reſti il luogo delle diecine di migliaja, eſſendo che 22 millenari ſon 22000 . Per maggior chiarezza dello ſcritto poſſono aggiungerſi i convenienti zeri , come ſi vede fatto quì , e per regola invariabile ; al prodotto della ſeconda colonna ſi aggiunge ſempre un zero , al prodotto della terza ſe ne aggiungono due , al prodotto della quarta tre , e così eſſendovi al-

tre colonne da fommare, alle diecine di migliaja fi aggiungono quattro zeri, alle centinaja di migliaja cinque, e così fempre uno di più, perchè il primo numero dei prodotti deve occupare un valor locale fempre maggiore; Ed è cofa ficuriffima, che la tanto facilmente colligibile total fomma di quefti numeri, è quella appunto, che deve rifultare dalle colonnette di numeri date a fommare; le quali, fe per una riprova fi fommino per la regola univerfale della Lezione II., trovandofene l' ifteffo rifultato, fi potrà effer certi di non aver prefo errore, effendochè in queft' ultimo ordinario computo, ove fi portano fucceffivamente le diecine, i centenari &c. le proporzioni tra numero, e numero fon fempre differenti da quelle dell' altro computo fatto, e farebbe in confeguenza un vero prodigio fe effendo l' uno, e l' altro computo diverfamente erroneo, non ne foffe diverfo il prodotto.

Troverebbe per avventura un Principiante difettofa quefta prima operazione, fe non aveffe quì il modo di fommare la diverfità delle monete, che effendo fcudi Fiorentini, lire, foldi, e denari, comincierà dai denari; computati i quali, fe non arriveranno a 12, ne fcriverà fotto la linea alla loro dirittura il dato numero, e pafferà fenz' altro riguardo a fommare i foldi; fe poi foffero o 12, o più di 12, veda quante volte contengano il 12, poichè altrettante unità (*che faranno tanti foldi, 12 denari facendo il foldo*) dovrà riportare nell'

or-

ordine de' soldi : e se vi fossero residui , essi soli scriverà in riga dei denari : ex gr. essendo il numero de' denari 32 perchè nel 32 sta il 12 due volte , e avanza 8, si riporta due nel numero dei soldi, ed il residuo 8 si scrive sotto i denari . Nel computo dei soldi , poichè 20 soldi , fanno la lira , quante volte starà 20 nel numero dei soldi , tante unità , che saranno tante lire si riporteranno nell' ordine delle lire , scrivendo in riga dei soldi, se vi è qualche residuo. Siccome finalmente sette lire fanno lo scudo fiorentino , quante volte si troverà contenersi il 7 nel numero delle lire , tante unità (*che saranno Scudi*) si riporteranno nell' ordine di questi , segnando solo in riga delle lire il residuo , se vi è.

Trattandosi di moneta Romana si fanno i computi di Scudi , e Bajocchi , e come cento Bajocchi fanno lo scudo Romano di Paoli 10 ; quante volte nella raccolta somma dei Bajocchi si contiene il *cento* , tante unità (*che saranno Scudi*) si trasportano nel numero delli scudi medesimi, e qualunque residuo da cento in giù si scrive in riga di Bajocchi.

E poichè trattasi di diversità di moneta , non sarà forse spiacevol cosa , che io noti quì alcuni ripieghi per istantanea riduzione d' una in altra moneta .

Se vogliasi ridurre un numero di soldi a lire , si levi l' ultima cifra , o figura , e il numero , che rimane si divida per 2 , e il prodotto son tante lire ; se la tolta ultima ci-

fra

fra è zero, faranno le lire fenza alcun refiduo di foldi; fe poi foffe un' altra cifra, come 1, 2, 3 &c. vi farà un refiduo di tanti foldi quante unità conterrà la foppreffa cifra *ex. gr.* al numero 3520, tolta l'ultima cifra, che è zero, rimane 352, che divifo per due, la fua metà è 176; e 176 lire fono efattamente 3520 foldi; così tolta al numero 327 l' ultima cifra 7, refta 32, la di cui metà e 16, numero di lire: ma qui bifogna far cafo anche della cifra foppreffa, non effendo zero, e contarla per tanti foldi, quante contiene unità, onde 327 foldi fono precifamente lire 16, foldi 7.

Volendo ridurre un numero di Bajocchi a fcudi romani, bifogna levare l' ultime due cifre dal numero dei Bajocchi, e il numero che rimane efprime fenz' altra operazione quanti fcudi fono i dati Bajocchi: Ed è offervabile ancor quì, che fe le due tolte cifre non fono zeri, efprimeranno un refiduo di Bajocchi da foggiungerfi al numero delli fcudi, e quefto feguirà ancorchè una delle figure foppreffe fia zero, e l' ultima nò: *ex. gr.* 35916 Bajocchi fono fcud 359, e Bajocchi 16: e 54240 Bajocchi fono fcudi 542, e Baj. 40, così Bajoc. 225305, fono fcudi 2253, e Baj. 5.

Gli fcudi Fiorentini fi riducono a Romani multiplicandoli per 105, numero dei Bajocchi che contiene lo fcudo fiorentino, dal prodotto della qual multiplicazione tolte le ultime due fi-

figure, il rimanente è numero di scudi Romani : *ex. gr.* *Scudi Fiorentini* 524
Bojocchi 105

Ed ecco nell' annesso esempio che Sc. Fiorentini 524, sono Scudi Romani 550, e Baj. 20.

2620
000
524
550,20

Passando alla *Sottrazione*, mi pare, che una piccola difficoltà possa facilmente incontrarsi da molti allorchè s' interpongono molti zeri tra le cifre del numero, dal quale deve sottrarsene un' altro : *ex. gr.* in questo, in cui da zero 5 non potendo sottrarsi, dee dirsi secondo la data regola, da 10, sottraendo 5, rimane 5. Ma questo 10 non può prendersi nè dal seguente numero delle diecine, nè dal centenario, nè dal millenario, poichè son tutti zeri, onde convien prenderlo dalle diecine di migliaja per quattro volte, e considerare non 10 quello che si prende, ma 9 a cagione, che si è sempre profittato d' uno per l' antecedente numero. Dovrà dunque dirsi primieramente, se da 10 si leva 5, riman 5: se da 9 tolgasi 9, resta 0 : se da 9 si toglie 8, resta 1 : se da 9, 3, resta 6: Ne viene ora il numero 1 delle diecine di migliaja, del quale siccome si è già profittato, come si è det-

6300010000
5973463895
326546105
6300010000

detto, avendo contribuito al primo zero una diecina, al secondo un centenario; al terzo un millenario, e al quarto novemila, egli stesso ora resterebbe zero, ed ha bisogno di prender dal 3 delle centinaja di millioni un' unità, che qui si conta per 10; ma è eguale a 100 millioni, del qual numero vengono a profittare i tre zeri, che seguono divenuti per la ragion dei passati altrettanti 9, come dalla sottrazione fatta nel dato esempio si può vedere, alla quale operazione si è aggiunto la riprova, perchè si conosca che la data difficoltà si è superata bene, e senza errore.

Qualora si dovesse sottrar diversità di monete, come Scudi, Lire, Soldi, e Denari, basta avvertire, che quando nel numero maggiore s'incontrino cifre minori delle corrispondenti nel numero sottraendo, se il caso succede nei denari, si prende 1. dai soldi, vale a dire 12 denari: se accade nei soldi si prende una delle lire, cioè 20 soldi, se nelle lire, si prende uno degli scudi, vale a dire 7 lire. In somma per i denari si prende 12; per i soldi 20; per le lire 7. Ma ai soldi, alle lire, e alli scudi si leva poi nella successiva sottrazione solamente uno: *ex. gr.* di 4 levar 8 non è possibile; onde si prende 12 (*cioè un soldo*), e si dice se di 16 si leva 8, rimane 8. Indi d' 11, (*essendosi preso un soldo*) levar 16 non si può,

Sc.	Lire	Sol.	den.
36001	„ 4	„ 12	„ 4
29969	„ 5	„ 16	„ 8
6031	„ 5	„ 15	„ 8
36001	„ 4	„ 12	„ 4

ma preso 20 (*cioè una lira*) si dirà se di 31 si leva 16 , resterà 15 : di 3 non può levarsi 5 ; dunque preso 7 (*cioè uno scudo*) si dirà , se di 10 si leva 5 , resta 5 : lo scudo , di cui si è profittato , fa che l' ultimo numero delli scudi cioè 1. , rimanga zero , onde bisognerà prendere 1. da 6 (*cioè da* 6000) , che a questo primo zero servirà d' una diecina , al secondo d' un centenario , e al terzo d' un migliajo . Ma anche qui il secondo , e terzo zero vien contato per 9.

Si noti , che quanto si è detto della diversità delle monete si adatta alla diversità delle misure, e loro frazioni , purchè si prendano i numeri , che bisognano in proporzione del numero delle parti , nelle quali vien divisa , e suddivisa la data misura , e l' istesso dicasi del peso . Che se occorra un conteggio misto di misure , e di peso con delle frazioni, si osservi il seguente esempio per non errare .

Si supponga che alcuno levi Olio Barili 964000, Fiaschi 6, Libbre 4 , Once 7 , e ne paghi B. 939864 , F. 10 , L. 5 , O. 9 : si pone il Barile di Fiaschi 18 , il Fiasco di Libbre 6 , e mezza , e la Libbra Once 12 .

Leva =	964000 ,,	6 ,,	4 ,,	7
Paga =	939864 ,,	10 ,,	5 ,,	
Resta =	24135 ,,	13 ,,	$4\frac{1}{2}$ —	10
Riprova =	964000 ,,	6 ,,	4 ,,	7

Non potendosi dunque da 7 levar 9, si prende 12 (*cioè una Libbra*) dalle libbre 4, e dicesi: da 19 levando 9, resta 10 : le libbre 4 devono ora considerarsi 3, avendone tolto una, ma da 3 è impossibile levar 5, bisognerà dunque prender libbre 6 — , (*che è un fiasco*) dai 6 fiaschi, e dire : da $9\frac{1}{2}$ levando 5, resta $4\frac{1}{2}$. Ora dai 5 fiaschi non se ne possono levar 10 : Bisognerà dunque prenderne 18 (*che è un Barile*) dal numero di essi Barili, e dire : se da 23 si leva 10, resta 13. Dal numero 4, numero millenario dei Barili abbiamo ora bisogno di levar 1 per far dir 10 l' ultimo zero, che non 10, ma 9 dovrà contarsi perchè si era levato 1 ; si dirà dunque : se di 9 si leva 4, resta 5 : e così contando per 9 gli altri due zeri, e rammentandosi di di contar per 3 il 4 millenario, essendoseli già levato 1 per somministrar 10, 100, 1000 ai tre zeri, sarà superata ogni difficoltà. Per non errar finalmente nel far la riprova, si osservi, che delle once 19, se ne riportano 12 alle libre, e se scrive il residuo 7. Le libbre, con una, che se n' è riportata son 10. e mezza; riservandone 6, e mezza (*che fanno un fiasco*) si scrive il residuo 4 : E dei fiaschi 24, riservandone 18, (*cioè un Barile*) si scrive il residuo 6. E riportato, che sia il riservato Ba-

ri-

rile , la ſomma degli altri numeri non ha alcuna difficoltà.

Anche nell' operazione del multiplicare, il numero multiplicando può aver talvolta diverſità di monete, miſure, o peſi : E riguardo alle monete è oſſervabile, che ſe il multiplicando eſprime un numero di lire, ſoldi, e denari veduto per mezzo della infraſcritta Tavola, qual porzion di lira contengano i ſoldi, e qual porzion di ſoldo contengano i denari, ſi è certi, ſenz' altra operazione, che il prodotto della multiplicazione sì dei ſoldi, che dei denari, è tante porzioni o di lira, o di ſoldo, quante unità comprende il multiplicatore. Prima di darne un'eſempio ſi oſſervi qui la regola per aſſegnare al vario numero di ſoldi, e di denari, ſecondo la diverſitá dei caſi la corriſpondente porzione, o di lira, o di ſoldo.

Per 1 ſoldo = una venteſima parte della lira
2 ſoldi = una decima parte
3 ſoldi = una decima, ed una venteſima parte
4 ſoldi = una quinta parte
5 ſoldi = una quarta parte
6 ſoldi = una quinta, ed una decima parte
7 ſoldi = una quarta, ed una decima parte
8 ſoldi = due volte la quinta parte
9 ſoldi = una quarta, ed una quinta parte
10 ſoldi = la metá della lira.

Quando i ſoldi foſſero più di dieci, ſi prende la metà di lira per i dieci, e la porzione,

che

che corrisponderà al numero dei medesimi soldi sopra i dieci secondo la sopra descritta regola.

Per 1 den. = la ventiquattresima parte del soldo
2 den. = la duodecima parte
3 den. = l' ottava parte
4 den. = la sesta parte
5 den. = la sesta, e la ventiquattresima parte
6 den. = la quarta parte
7 den. = la sesta, e l' ottava parte
8 den. = la terza parte
9 den. = la quarta, e l' ottava parte
10 den. = la quarta, e la sesta parte
11 den. = la terza, e l' ottava parte.

Si osservi qui, che sebbene la 12. parte, non la 24 del soldo faccia il denaro, si è trovato espediente il considerare il soldo di 24 parti per avere le porzioni del medesimo soldo più semplici: perciocchè se *ex. gr.* si avessero nel numero multiplicando 11 denari, e si volesse considerare il soldo (come è di fatto) composto di 12, bisognerebbe per gli 11 denari prendere, la metà, un terzo, e un dodicesimo di soldo, dal che ne verrebbe un troppo lungo, ed intralciato conteggio. Ma la ragione, che favorisce il considerare diviso il soldo in 24 piuttosto, che in 12 porzioni, si manifesta nei 4, e negli 8 denari, che sono i due casi, che quasi sempre si danno; essendochè proporzionamente alle parti 24, per 4 denari si prenda il sesto del soldo, e per 8 de-

denari il terzo. Laddove nella proporzione delle 12 parti per gli 8 denari converrebbe prendere e la metà, e il sesto del soldo, cosa incomoda, e prolungante il conteggio.

Sia per un esempio da multiplicarsi lire 3462, soldi 5, e denari 8 per 243, dovendosi prendere per i denari 8, la terza parte del soldo, ed essendo composto il *multiplicando* di 243 unità, si vedrà subito, che il prodotto della multiplicazione de' denari 8, è 243 terzi di soldo, che divisi per tre, fanno soldi 81: ma siccome si è preso per ogni denaro il ventiquattresimo del soldo, cioè la metà di quello, che è in fatti, il prodotto vero della multiplicazione degli 8 denari sarà il doppio dei soldi 81, cioè soldi 162, vale a dire lire 8, soldi 2, che scrivansi a parte per aggiungersi al prodotto universale della multiplicazione.

Lire	*soldi*	*den.*
3462 „	5 „	8
243		
10386		
13848		
6924		
841266		
60 „	15 —	
8 „	2 —	
841334 „	17 —	

Venendo alla multiplicazione dei soldi 5, che fanno un quarto della lira, saranno essi 243 quarti di lira, che divisi per 4, fanno lire 60, e tre quarti, cioè soldi 15.

Mul-

Multiplicate finalmente le lire per la già nota regola, scrivasi sotto il prodotto delle medesime le lire 60 „ 15 prodotto dei soldi 5, e sotto queste le lire 8 „ 2 prodotto dei denari 8, e se ne raccolga il total prodotto 841334 „ 17 —, come vedesi fatto nel dato esempio.

Quando si è dato alla Lezione V. la regola dell' operazione del *dividere*, non si è dato in esempio un *divisore* composto di sole semplici unità, o di sole diecine, nei quali casi l' operazione riesce semplice molto, ed assai breve. In grazia dei Principianti siane in esempio il numero 5349 da dividersi per il numero 7 dicasi il 7 nel 53 vi stà sette volte, e avanza 4, scrivasi il *Quoziente* 7, e il residuo 4 uniscasi al 4, che segue, e dirà 44; nel qual numero il 7 vi stà sei volte, e avanza 2. Scritto il *Quoziente* 6, ed unito il 2 al 9; Si vedrà che nel 29 stà il 7 quattro volte, e avanza 1. Scritto il *Quoziente* 4 alla destra del 6, come sopra, e riservato il residuo 1, risulta subito, che nel 5349 stà il 7 764 volte, e avanza uno. Se voglia farsene la riprova si multiplichi questo *Quoziente* 764 per 7, che producendo 5348, è manifesto, che aggiuntovi il residuo 1, verrà a prodursi l' istesso numero *dividendo* 5349, e in conseguenza l' operazione è esatta. Coll' istessa brevità si opera anche nel caso d' un divisore composto di due numeri, o cifre, come 10, 15, 20.

5349	—
764	7
7	
5348	
1	

RE-

REGOLE DIVERSE

Estratte da Problemi Aritmetici, e Algebrici per altrettanti ripieghi alla Compendiosa esecuzione di varj pratici conteggi.

Articolo 2.

REgola prima. Per sapere il costo di una Libbre di seta, di lana, o di qualsiasi altro genere, di cui si sappia il valore del cento, o sia delle libbre 100.

Sian lire 70 il valore di libbre 100. Lana: deve vedersi quante volte stà il 5 nel 70. Il 5, io dico, essendo esso e la ventesima parte del cento, e dovendosi computar quì per la ventesima parte della lira, cioè per un soldo. Quattordici volte pertanto si vede stare il 5 nel 70, e 14 soldi fanno il valor della libbra di lana. Cosi costando cento libbre di seta lire 375, e 75 volte stando il 5 in detto numero, il prezzo d' una libbra sarà soldi 75, vale a dire, lire 3, soldi 15: Volendo usar regola anche più breve, basta dal valore delle cento tor via l' ultima cifra, o figura, e duplicar quel numero, che rimane, darà egualmente il prezzo della libbra; come tolto nel primo addotto esempio il zero da 70 riman 7, che duplicato fa 14 numero dei soldi che come sopra si è veduto sono il prezzo d' una libbra di lana: Così alle lire 375, prezzo di libbre cento seta, tolto l' ultima cifra 5, ri-

man

man 37, che duplicato dà il medesimo 75 numero dei soldi costituenti il prezzo d' una libbra di seta.

Regola seconda. Per sapere il valore di uno stajo di Grano, o altri generi, nella supposizione, che si sappia il valore del moggio dell' istesso genere, che se computasi a scudi bisogna multiplicare il loro valore per 3, ed aggiungere al prodotto la metà del numero medesimo degli scudi, e ne risulterà un numero di crazie da potersi con tutta facilità ridurre a lire, soldi, e denari. Che se *ex. gr* pongasi per valore d' un moggio di Grano Scudi 22, dicasi: 3 via 22 fa 66, al qual prodotto aggiunto 11 metà di 22, ne verrà 77 (*crazie*) che partito per 12 si avrà lire 6, e crazie 5, cioè soldi 8, 4, valore d' uno stajo di Grano. Così posto per un' altro esempio, il valor del moggio Sc. 17, si dica 3 via 17, fa 51, aggiungasi 8, e mezzo, metà di 17, e si avrà 59, e mezzo, che partito per 12, si avrà per valor dello stajo lire 4, soldi 11, e den. 2.

Se il valor del moggio fosse computato in lire, il loro numero devesi multiplicare per 10, e il prodotto sarà un numero di denari da partirsi per 12, per ridurli a soldi, *ex. gr.* sia il valore d' un maggio di Calcina lire 8: dicasi; 10 via 8 fa 80; nell' 80 il 12 vi stà sei volte, e avanza 8; dunque uno stajo di Calcina vale soldi 6, e den. 8.

Regola terza. Dedotta dalla doppia falsa

Po

Posizione, adattabile universalmente a tutti quei casi, che possono aver corrispondenza di ragione alla seguente Proposizione. Mevio aveva comprato una Botte di vino, non si rammenta nè quanto li costò, nè quanti Barili contenga, si ricorda solamente, che se rivendeva questo vino a lire 7 il Barile vi scapitava lire 20; E se lo avesse venduto lire 8, vi faceva il guadagno di lire 40. Vuole ritrovare ora e il numero dei Barili contenuti dalla Botte, e il prezzo, che gli costò.

Facciasi la doppia arbitraria supposizione, prima di 40, seconda di 50 Barili, si multiplichi l' uno, e l' altro supposto numero prima per le 7, indi per le 8 lire, e dicasi primieramente 7 via 40 fa 280; al qual numero aggiungendo 20 dello scapito a lire 7, fa 300. Vedasi ora se multiplicando il supposto 40 per 8 ne risulti il guadagno di lire 40: 8 via 40 fa 320, che darebbe 20 sole lire di guadagno, dunque 20 meno di 40. Si multiplichi ora la seconda supposizione 50: 7 via 50, fa 350, che con 20 dello scapito fanno 370: 8 via 50 fa 400, che darebbe il guadagno di 30, non di 40, dunque 10 meno di 40 dal difetto 20 risultato dalla prima supposizione, si sottragga 10, difetto, che risulta dalla seconda, e resterà 10, che deve essere il divisore del prodotto della multiplicazione, che deve farsi della prima posizione 40 col secondo errore 10; e della seconda 50, col primo errore 20, dicendo 20 via 50 fa 1000; 10 via 40 fa 400,

 che

che sottratto da 1000, rimane 600, che partito per 10 dà il Quoziente 60, che dico essere il numero dei Barili contenuti dalla supposta Botte; e che sia vero: 7 via 60 fa 420, e più 20 dello scapito, che si è supposto a lire 7 fa 440; 8 via 60, fa 480, che dà appunto il guadagno delle supposte lire 40 a lire 8 il Barile. Si è dunque trovato il numero dei Barili esser 60, ed il prezzo essere stato lire 440, il qual numero diviso per 60, dà il Quoziente 7, e un terzo, cioè lire 7, soldi 6, denari 8, costo d' un Barile.

Regola quarta. La medesima Proposizione può sciogliersi più brevemente assai sommando lo scapito 20 proveniente dal vender lire 7 il Barile, col guadagno 40, che ne avrebbe prodotto la vendita a lire 8, e dire 40, e 20 fa 60: dipoi sottraendo dalle lire 8 le lire 7, rimane 1 per divisore del 60, che diviso per 1 rimanendo il medesimo 60; si dirà che 60 Barili conteneva la Botte, come sopra.

Per veder chiaramente, che questa quarta regola è certa per qualunque altra diversità di numeri, si passi ad esplorar per la medesima quanto costasse, e quante staja contenesse di Grano un' arca posto che rivendendolo lire 5 lo stajo si scapiti lire 60, e rivendendolo 60, vi si lucri lire 80; si sommi 80, con 60, e si avrà 140: indi traendo 5 da 6, rimane 1 per cui si divida 140, e resterà l' istesso 140, e tante staja di Grano contien l' arca; se ne ricerchi per riprova il total prezzo dicendo: 5 via

via 140 fa 700 , e più 60 dello fcapito a 5 lire , fa 760 , Si veda fe computandolo a lire 6 ci dà le 80 lire di guadagno : 6 via 140 fa 840 , cioè 80 lire precifamente più delle 760, dunque 760 lire era il prezzo che coftò la prima volta l' arca del Grano in queftione , e conteneva 140 ftaja di Grano .

Regola quinta . Quando avviene , (come nel cafo propofto) che dalla diverfità del prezzo rifulta difetto , ed eccefſo nella propofizione fi deve fempre fommare infieme il difetto , e l' eccefſo dato , come fi è fatto fopra delle lire 60 di fcapito colle 80 di guadagno . Se poi portaffe la propofizione o due eccefſi , minore, e maggiore , o due difetti , fi deve fottrarre il minore , dal maggiore eccefſo , e il minore dal maggior difetto : *ex gr.*

Di una librerìa invendita pagando ogni volume lire 2, verrebbe a coftare lire 60 più di quello fu ftimata, e a ragione di lire 4 per volume cofterebbe 3620 lire più di detta ftima . Si vuol fapere di quanti volumi fia compofta , e quanto fu ftimata . Perchè tanto il prezzo di lire 2 , che di lire 4 per volume porta eccefſo fopra la ftima , fi fottrae l' eccefſo 60 dall' eccefſo 3620 , il refiduo 3560 fi divide per la differenza dei due prezzi 2, e 4 che è 2, e ne viene il Quoziente 1780, che è il numero dei volumi della Librerìa : Imperciocchè computato quefto numero di volumi a lire 2 fi ha la fomma di lire 3560 : dalla qual fomma fottratto 60 , che è il fuppofto eccefſo

ſopra la ſtima alla ragione di lire due, rimangano lire 3500, che dico. eſſer l' ignota ſtima fatta della Librerìa, eſſendochè computati i 1780 volumi a ragione di lire 4, cioè multiplicato 1780 per 4 ſi ha il prodotto di lire 7120, dal quale ſottratto il ſuppoſto eccesso ſopra la ſtima, cioè lire 3620, rimane la medeſima ſomma 3500, che è dunque indubitatamente la ſtima fatta della Librerìa. Che ſe *ex. gr.* ſi poneſſe mezza lira, ed una lira per volume, ſiccome tanto la mezza, che l' intera lira darebbero ſomme minori della ſtima 3500, cioè lire 890, e 1780; anche in queſto caſo il difetto della ſeconda ſomma, che è 1720 ſi deve ſottrarre dal difetto della prima, che è 2610, ed il reſiduo 890 dividerlo per la differenaa dei due poſti prezzi di un volume, che è mezza lira: Ora la mezza lira in lire 890, ſtandovi 1780 volte, avremo in tal *Quoziente* il numero dei volumi, come ſopra. Pongaſi finalmente l' ecceſſo per una parte, e il difetto per l' altra, ſupponendo prima coſtare ogni volume una lira, e quindi due. La ſuppoſizione di una lira dà 1720 lire di meno di quello è ſtata ſtimata la Librerìa: La ſuppoſizione di due lire da lire 60 di più di detta ſtima. Quì queſto meno, e queſto più deve ſommarſi inſieme, e farà 1780, che diviſo per 1 (differenza tra una, e due lire ſuppoſte per ogni volume) dà il medeſimo 1780, numero dei volumi, come ſi è oſservato ſopra, la ſtima dei quali ſi è veduto eſſere lire 3500, che di-

divifo per 1780, numero dei volumi si vedrà
coftare ogni volume lire 1 foldi 19 „ 4.

La ragione per cui, venendo due eccessi, o due difetti dai fuppofti due prezzi, si deve fottrar l' eccesso, o il difetto minore dal maggiore, cioè si deve far cafo fol della differenza tra i medefimi, è foftenuta dalla proporzione e convenienza del divifore, che è anch' effo la differenza tra i due pofti prezzi; la qual ragione conviene anche alle propofizioni, ove cade il più, e il meno, o fia l' eccesso, e il difetto, che fommati infieme producono quella diftanza tra l' eftremità del più, e del meno, che equivale alla proporzional differenza, ftante che il meno che è per una parte, diftruggendo in certo modo il più dell' altra, si ha bifogno dell' uno, e dell' altro ad equilibrar la proporzione con la differenza dei due dati prezzi, che ne è il divifore.

Regola fefta. Poichè fiamo fu i ripieghi per la fpedita foluzione della doppia falfa pofizione, è fommamente rimarcabile, che tutte le propofizioni, che non poffono fcioglierfi per femplice, ma folo per doppia falfa pofizione, fi rifolvono ancora compendiofamente, e ficuramente così. Sia *ex. gr.* da doverfi trovare il refpettivo, precifo prezzo di tre Cavalli, i quali prefi infieme coftarono fcudi 287: fi fa, che quello di maggior prezzo, fu pagato 17 fcudi più di quello dell' infimo prezzo, e quel di prezzo medio, 6 fcudi più di quefto medefimo di prezzo infimo. Pongafi che il

prez-

prezzo infimo sia scudi 2 , il medio scudi 8 , e il massimo scudi 19 . Presa la differenza tra ii primo , e terzo , che è 17 , e tra il primo, il secondo, che è 6; e sommate queste insieme, il prodotto 23 si deve sottrarre dalla total nota somma 287 , e il residuo 264 si divide per 3 , poichè tre sono i Cavalli, dei quali si vogliono individuare i prezzi; ed il quoziente 88 sarà il costo del Cavallo dell' infimo prezzo; e se a questo numero si aggiunga 6, si avrà 94, costo del Cavallo di prezzo medio , e aggiungendo al medesimo 88 la differenza 17 si avrà 105 costo del Cavallo del maggior prezzo : E che sia vero , si sommino insieme questi tre prezzi , e si troverà il prodotto del totale dato prezzo 287.

Si noti , che se gli oggetti dei quali si devono individuare le somme fossero più di tre basta osservare che le differenze da sommarsi insieme siano tra il primo , e l' ultimo, tra il primo , e il penultimo , tra il primo , e il terz' ultimo , e così cominciando sempre dal primo, si devon computare tutte le differenze tra Il primo , e tutti gli altri numeri, ehe gli seguono , sian quanti vogliono , *ex. gr.* . Cinque uomini, che abbiano guadagnato in nn anno in un istesso lavoro , nel quale avevano lo stipendio di una lira il giorno lire 1395, supposto, che il secondo abbia lavorato 3 giorni più del primo ; il terzo 4 giorni più del secondo; il quarto 6 giorni più del terzo ; e il quinto 8 giorni più del quarto . Si prenda la differenza

tra

tra il primo, e il quinto, che è 21, tra il primo, e il quarto, che è 13; tra il primo e il terzo, che è 7, tra il primo, e il secondo, che è 3, Si sommìno insieme queste differenze, e il prodotto, o somma totale 44 si sottragga dalla somma del total guadagno 1395: e partito il residuo 1351 per 5, (perocchè 5 son gli uomini, tra i quali si ha da distribuire il guadagno) nel quoziente 270, e un quinto, che diremo lire 270, e soldi 4, avremo la porzione di quello, che ha operato minor numero di giorni di tutti gli altri, e così secondo la data proporzione, si potranno assegnare le porzioni a tutti gli altri, cioè lire 273 soldi 4 al secondo, 277 soldi 4 al terzo; 283 soldi 4 al quarto, e 291 soldi 4 al quinto: le quali cinque porzioni sommate insieme danno precisamente la total somma 1395; che il è proposto fatto guadagno in comune.

E' notabile in questo mirabil compendio di doppia falsa posizione, che i numeri, che qui si pongono ad arbitrio, o portino al più, o al meno, vale a dire, facciano somma maggiore o minore della somma data, non si deve variare in alcun conto l' operazione, atteso che si fa caso solamente della differenza tra numero e numero, non del quantitativo della somma prodotta.

Su i quì dati esempj di compendiar conteggi, potrà il lettore, se gliene vien talento, esercitare la propria penetrazione, e sottilizzare sulle quì proposte Lezioni per dedurne del-

delle ſempre più facili , compendioſe , e profittevoli regole .

Tavola Pitagorica , che nelle Operazioni della multiplicazione , e diviſione porge più comodo giovamento del ſolito Abaco .

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

INDICE

Di quanto trattasi in quest' Opera.

Ta-

ER-

ERRORI	CORREZIONI
Pag. 3. Propofizione	Proporzione
Pag. 7. Re prima di venia	Prima di venire a
Pag. 10. 6097	26097
Pag. 18. a deftra	a finiftra
Pag. 22. menchin'	manchin'
Pag. 51. e 7 $\frac{3}{4}$	7, e $\frac{3}{4}$
Pag. 57. fi abbiano	fi abbia
Pag. 51. $\frac{-}{3}$	$\frac{1}{3}$
Pag. 69. alla VII. Lezione	alla VI. Lezione
Pag. 70. le ricercata	la ricercata
Pag. 73. di 7 a 5	di 7 a 3
Pag. 74. Cofiftendo	Confiftendo
Pag. 76. alle Lezione V.	alla Lezione VI.
Pag. 80. cominando	caminando
Pag. 81. due parti	due terze parti
Pag. 114. 700	7000
Pag. 132. = 2 −, 50 che	= 2 − 5, o che